分析力学

叶敏 肖龙翔 编著

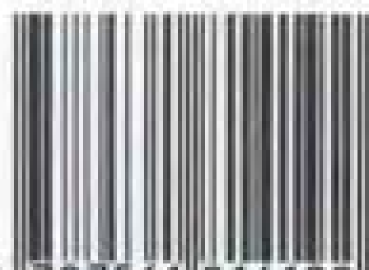
FENXILIXUE

天津大学出版社

责任编辑：张津红
封面设计：庞恩昌
技术设计：赵淑芬

分析力学

ISBN 7-5618-1419-4



分 析 力 学

叶 敏 肖龙翔 编著

天 津 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书包括分析力学基础、力学的变分原理、完整系统动力学和非完整系统动力学四篇，共十章。主要内容有：分析力学的基本概念，虚位移原理和达朗伯原理，动力学方程的三种基本形式，高斯最小拘束原理，哈密顿原理，拉格朗日第二类方程，哈密顿正则方程，拉格朗日乘子法，阿沛尔方程，凯恩方程。每章均配有适量的例题、习题和答案，所需学时在40~60之间。

本书可作为高等工科院校本科生和研究生分析力学课程的教材，也可供有关科研和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

分析力学/叶敏，肖龙翔编著. —天津：天津大学出版社，2001.4
ISBN 7-5618-1419-4

Ⅰ.分… Ⅱ.①叶…②肖… Ⅲ.分析力学—高等学校—教材
Ⅳ.O316

中国版本图书馆CIP数据核字（2001）第11295号

出版发行　天津大学出版社
出 版 人　杨风和
地　　址　天津市卫津路92号天津大学内（邮编：300072）
电　　话　发行部：022—27403647　邮购部：022—27402742
印　　刷　天津市宝坻县第二印刷厂
经　　销　全国各地新华书店
开　　本　880mm×1230mm　1/32
印　　张　9
字　　数　272千
版　　次　2001年4月第1版
印　　次　2002年5月第2次
印　　数　2001-4000
定　　价　15.00元

前　言

分析力学属经典力学的范畴，它作为一门学科，已有二百余年的历史。它的创立可以追溯到1788年拉格朗日(Lagrange J.L.)发表的名著《分析力学》一书开始，后经哈密顿(Hamilton W.R.)等人的发展使分析力学的理论体系臻于完善。但是，在拉格朗日时代还没有认识到非完整系统的存在，直到1894年赫兹(Hertz H.R.)才第一次将约束和系统分成完整和非完整两大类，从此对非完整力学才有了较系统的研究，这无疑是将拉格朗日的成果推进了一大步。随着近代数学的发展，用近代微分几何的观点研究分析力学的原理和方法是近代分析力学的重要标志，它使得经典的拉格朗日和哈密顿理论更加完美。

分析力学研究宏观低速物体机械运动的一般规律。它是与以牛顿基本定律为基础的矢量力学并驾齐驱的另一种力学体系，其特征是以普遍原理为基础，利用标量形式的广义坐标来代替矢量力学的矢径，以对能量和功的分析来代替矢量力学中对力和动量的分析，从而有可能利用纯粹数学分析的方法导出基本的运动微分方程，并研究这些方程本身和积分方法。由于分析力学是从普遍的变分原理出发建立系统的运动微分方程，所以它具有高度的统一性和普遍性。随着生产实践和科学技术的发展，新的研究课题不断涌现，分析力学的一些基本概念和思维方法，不断地渗透到许多新学科领域中去，如航天技术、现代控制理论、计算力学、非线性力学等。因此，作为工程专业的学生学习一些分析力学的知识是有必要的。

作者在工程力学专业开设的分析力学课程的基础上，借鉴目前各类分析力学教材，经过修改、补充而形成了本书的理论体系。本教材主要是为工程力学专业的本科生和研究生编写的，但考虑到一般工科类学生的使用，第一篇分析力学基础部分的内容有所加强，对于不同专业的学生可适当进行选择学习。如作为力学专业本科生或研究生，有较好的理论力学基础，则第一篇的内容可以压缩或作为自学，把第四篇作为补充内容。对于一般工程专业的学生可按编排内容讲授前三

篇。

本书包括分析力学基础、力学的变分原理、完整系统动力学和非完整系统动力学四篇，共分十章。依次阐述了分析力学的基本概念，虚位移原理和达朗伯原理，动力学方程的三种基本形式，高斯最小拘束原理，哈密顿原理，拉格朗日第二类方程，哈密顿正则方程，拉格朗日乘子法，阿沛尔方程，凯恩方程。每章均配有适量的例题和习题，以便加强对基本概念和理论的理解与应用，所需学时在40～60之间为宜。

本教材由肖龙翔（第1章至第3章）、叶敏（第4章至第10章）编写，郎作贵、陈璐承担了本书全部计算机文字录入和绘图的工作。

本教材承蒙毕学涛教授详细审阅，并提出了许多非常宝贵的意见，作者在此表示由衷的感谢。本书的出版得到了各级领导和教研室老师的大力支持，许多优秀的分析力学教材也给了作者很大的帮助，在此也一并致以诚挚的谢意。

鉴于作者水平所限，书中错误和不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

2000年10月

目 录

第一篇 分析力学基础

第二篇 力学的变分原理

第三篇　完整系统动力学

第四篇　非完整系统动力学

第一篇　分析力学基础

第1章　分析力学的基本概念

1.1　分析力学的研究对象　约束

1.1.1　分析力学的研究对象

在力学中有三种理想模型：质点、质点系和刚体。**质点**被定义为只有质量、没有大小的物体；**质点系**是由若干质点组成的、有内在联系的集合；**刚体**则是一种特殊的质点系，在这种质点系中，任意两质点的距离始终保持不变。

分析力学的研究对象是质点系。

质点系各质点在空间位置的有序集合决定了该质点系的位置和形状，称为该质点系的**位形**。

如果某质点在空间的位置和运动不受任何限制，这种质点称为**自由质点**；由自由质点组成的、有内在联系的集合称为**自由质点系**或**自由系统**。反之，如果某质点在空间的位置和运动受到某些限制，称为**非自由质点**；由非自由质点组成的、有内在联系的集合称为**非自由质点系**或**非自由系统**。我们赖以生存的太阳系是自由质点系。人们发明创造的种种机构、机器、建筑物，如曲柄连杆机构、汽轮发电机组、桥梁等等，都是非自由质点系。

分析力学是运用纯粹数学分析的方法研究质点系的机械运动。

1.1.2　约束　约束的分类

非自由质点系在空间的位置以及在运动中受到的限制称为**约束**。

用数学方程表述各质点所受的限制条件称为**约束方程**。约束方程通常可以在建立此质点系的动力学方程之前写出来。由此可知，非自由质点系是受约束的质点系。

在分析力学所研究的非自由质点系中存在着形形色色的约束，为了认清非自由质点系的特征，先讨论约束的分类。

从约束方程的形式上看，约束可分为几何约束和运动约束两大类，它们又都可分为定常约束和非定常约束、双面约束和单面约束、可积分的和不可积分的约束。

从约束方程的实质来看，约束可分为完整约束和非完整约束两大类。下面分别讨论各类约束的特征。

1.1.3 几何约束 运动约束

1.1.3.1 几何约束

在质点系中，所加的约束只能限制各质点在空间的位置或质点系的位形，这种约束称为**几何约束**或**位置约束**。几何约束方程的一般形式是

$$f(\boldsymbol{r}_i, t) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.1.1}$$

或

$$f(x_i, y_i, z_i, t) = 0 \tag{1.1.2}$$

其中
$$\boldsymbol{r}_i = x_i \boldsymbol{i} + y_i \boldsymbol{j} + z_i \boldsymbol{k} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

式中 $\boldsymbol{r}_i$ 和 x_i、y_i、z_i 分别是第 i 个质点的矢径和它在直角坐标系中各坐标轴上的投影。n 为该质点系中的质点数。

1）在几何约束中视约束方程是否显含时间参数可分为定常几何约束和非定常几何约束

（1）在约束方程中，不显含时间参数 t 的约束称为**定常几何约束**或**稳定几何约束**。

图 1－1－1 中，质点 M 用长 l、质量可忽略不计的刚杆固结，连接在球形铰链支座 O 上。这是一个定长度的单摆。该质点被限制在以 O 为中心、l 为半径的球面上运动，约束方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$

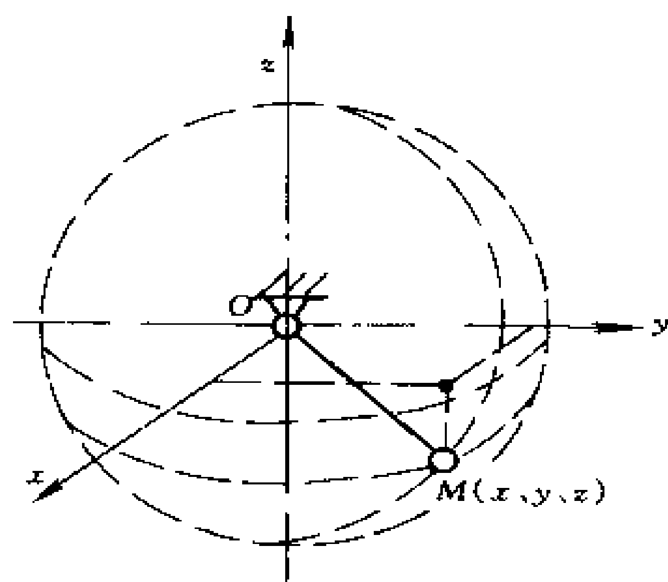


图 1-1-1

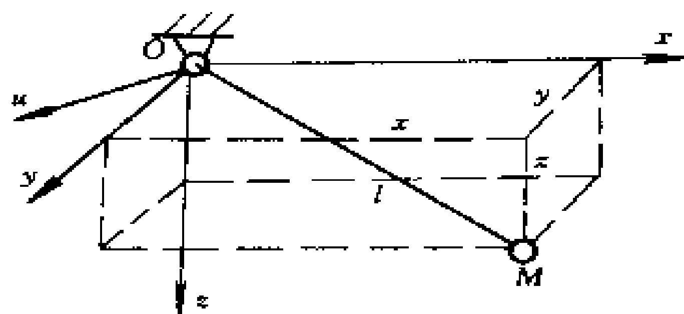


图 1-1-2

式中不显含时间参数 t，因此，质点 M 所受的约束属于定常几何约束。

（2）在约束方程中，显含时间参数 t 的约束称为**非定常几何约束**或**非稳定几何约束**。

图 1-1-2 中，质点 M 用长 l、质量可以忽略不计、不会伸长（或缩短）的柔性绳固结，此绳的另一端穿过固定的圆环 O，以匀速度 u 曳引。这是一个变长度的单摆。设初瞬时，即 $t=0$ 时，质点 M 至圆环 O 的绳长（即初始摆长）为 l_0，则任意瞬时 t 的摆长 $l=l_0-ut$，质点 M 的约束方程为

$$x^2+y^2+z^2=(l_0-ut)^2$$

式中显含时间参数 t，因此，这种约束属于非定常几何约束。

2）在几何约束中视约束方程是否为等式可分为双面几何约束和单面几何约束

（1）约束方程为等式的几何约束称为**双面几何约束**或**固执几何约束**。图 1-1-1 所示的单摆即属此约束。

（2）约束方程为不等式的几何约束称为**单面几何约束**或**非固执几何约束**。在图 1-1-1 中，如果单摆的刚杆改用柔性绳，那么，这种约束不允许质点 M 在半径为 l 的球面以外的空间运动，既允许它在

此球面上运动，也允许在球面以内的空间内运动。约束方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant l^2$$

呈等式和不等式形式，属于单面几何约束。

准确地说，在图 1－1－2 中，变长度单摆的约束是单面非定常几何约束，约束方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant (l_0 - ut)^2$$

在本书中，如无特别说明，所涉及的约束均为双面约束。

1.1.3.2　*运动约束*

在质点系中，所加的约束不仅限制各质点在空间的位置，还限制它们运动的速度，这种约束称为**运动约束**，也称**速度约束**或**微分约束**。运动约束方程的一般形式为

$$f(\boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i, t) = 0 \tag{1.1.3}$$

或

$$f(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) = 0 \tag{1.1.4}$$

其中
$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \dot{x}_i \boldsymbol{i} + \dot{y}_i \boldsymbol{j} + \dot{z}_i \boldsymbol{k}$$

式中 $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 和 $\dot{x}_i$，$\dot{y}_i$，$\dot{z}_i$ 为第 i 个质点的速度和速度在直角坐标系中各坐标轴上的投影。在大多数的实际问题中，运动约束都可化简为与各质点速度的线性项有关的形式，即

$$f = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Psi}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i + A = 0 \tag{1.1.5}$$

或

$$f = \sum_{i=1}^{n} (A_i \dot{x}_i + B_i \dot{y}_i + C_i \dot{z}_i) + A = 0 \tag{1.1.6}$$

$$\boldsymbol{\Psi}_i = (A_i, B_i, C_i) = A_i \boldsymbol{i} + B_i \boldsymbol{j} + C_i \boldsymbol{k} \tag{1.1.7}$$

式中 $\boldsymbol{\Psi}_i$、A_i、B_i、C_i 和 A 均为各质点速度和位置的函数，这种约束称为**线性的运动约束**，或称为**一阶线性约束**、**Pfaff 约束**。本书只讨论一阶线性的运动约束。

1）运动约束中的可积分的运动约束和不可积分的运动约束

（1）如果约束方程能够变换为某个函数的全微分，或满足可积分的条件（参见 1.1.6），这种约束称为**可积分的运动约束**。

在图 1－1－3 中，半径为 r 的圆柱体在粗糙的平直轨道上滚动而无滑动，它与轨道的接触点 A 的速度 v_A 恒为零，在图示瞬时，设圆柱中心 C 的坐标为 x_C、y_C，速度为 $\dot{x}_C$，圆柱的转角为 φ，角速度为 $\dot{\varphi}$，方向、转向如图所示。此圆柱的约束方程为

$$y_C = r$$

$$v_A = \dot{x}_C - r\dot{\varphi} = 0$$

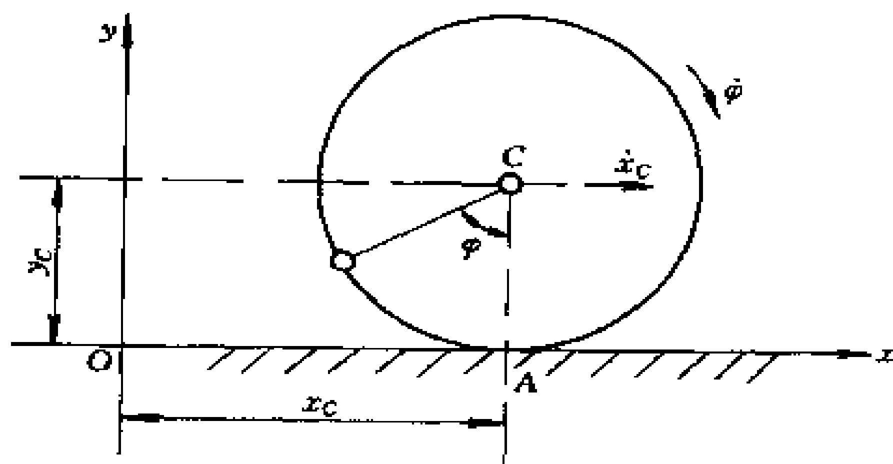


图 1－1－3

前者仅含坐标参数 y_C，属于定常的几何约束；后者包含了速度 $\dot{x}_C$ 和角速度 $\dot{\varphi}$，属于运动约束。它只含 $\dot{x}_C$、$\dot{\varphi}$ 的线性项，是线性的运动约束。在此运动约束方程的等号两侧乘以 $\mathrm{d}t$ 后，$\mathrm{d}x_C - \mathrm{d}(r\varphi)$ 可以写成函数 $F = x_C - r\varphi$ 的全微分，即

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}(x_C - r\varphi) = 0$$

积分后为

$$x_C - r\varphi + C = 0$$

式中只含坐标 x_C、角坐标 φ 和积分常数 C，是几何约束的形式，由此可知，可积分的运动约束可以变换为几何约束。

（2）如果运动约束方程不能化简为某函数的全微分，或不满足可积分的条件（参见 1.1.6），则称为**不可积分的运动约束**。

图 1－1－4 是一个简单的“跟踪系统”示意图，该系统可以简化为 A、B 两个质点。运动时，A 点的速度 v_A 始终指向 B 点，因此，它的约束方程为

$$\frac{\dot{y}_A}{\dot{x}_A}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A},\qquad \frac{\dot{z}_A}{\dot{x}_A}=\frac{z_B-z_A}{x_B-x_A}$$

或

$$\dot{y}_A(x_B-x_A)-\dot{x}_A(y_B-y_A)=0$$

$$\dot{z}_A(x_B-x_A)-\dot{x}_A(z_B-z_A)=0$$

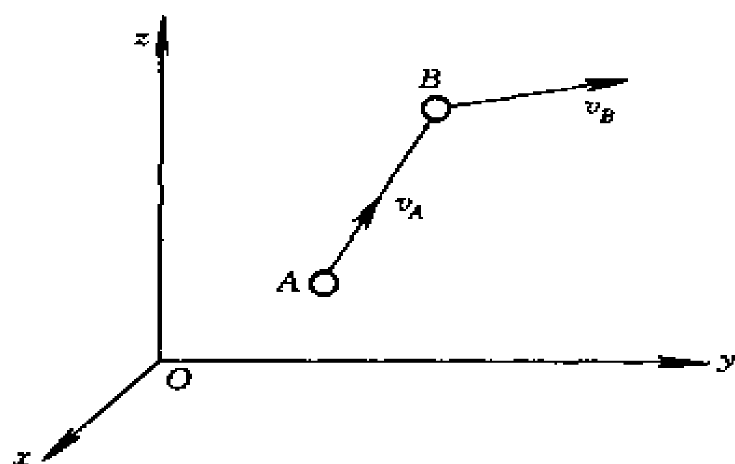


图 1-1-4

式中包含了 A 点的速度在直角坐标系中的投影 $\dot{x}_A$、$\dot{y}_A$、$\dot{z}_A$，属于运动约束，而且是线性的运动约束。在一般情况下，这种约束方程不满足可积分的条件（参见例 1-1），属于不可积分的运动约束。

2）其他类型的运动约束

如同几何约束那样，在运动约束中，视约束方程是否显含时间参数，有**定常运动约束**和**非定常运动约束**之分；视约束方程是否为等式，有**双面运动约束**和**单面运动约束**之分。

1.1.4 完整约束 非完整约束

1.1.4.1 完整约束

几何约束和可积分的运动约束实质上属于同一范畴的约束，在力学中称为**完整约束**。

1）几何约束

几何约束方程的一般形式为式（1.1.1）和式（1.1.2)。此方程对时间求一阶导数，得

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}_i}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i+\frac{\partial f}{\partial t}=0 \qquad (1.1.8)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\dot{x}_i+\frac{\partial f}{\partial y_i}\dot{y}_i+\frac{\partial f}{\partial z_i}\dot{z}_i\right)+\frac{\partial f}{\partial t}=0 \qquad (1.1.9)$$

其中

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y_i}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z_i}\boldsymbol{k}$$

由此看出：①几何约束不仅对非自由质点系的位形有限制，同时对此质点系各质点的速度也有相应的限制；②这种几何约束的导数形式是一种特殊的运动约束——线性的运动约束。式（1.1.8）和式（1.1.9）的等号两侧同乘以 $\mathrm{d}t$，得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}_i}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i+\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t=0 \qquad (1.1.10)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i+\frac{\partial f}{\partial y_i}\mathrm{d}y_i+\frac{\partial f}{\partial z_i}\mathrm{d}z_i\right)+\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t=0 \qquad (1.1.11)$$

式（1.1.10）和式（1.1.11）为几何约束的微分形式，它是全微分形式，是可积分的运动约束。这表明：几何约束可以变换为对应的可积分的运动约束。

2）可积分的运动约束

如前所述，本书只讨论线性的运动约束。线性的运动约束方程的一般形式为式（1.1.5）和式（1.1.6），在它们的等号两侧同乘以 $\mathrm{d}t$，得

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\Psi}_i\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i+A\mathrm{d}t=0 \qquad (1.1.12)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(A_i\mathrm{d}x_i+B_i\mathrm{d}y_i+C_i\mathrm{d}z_i)+A\mathrm{d}t=0 \qquad (1.1.13)$$

其中

$$\boldsymbol{\Psi}_i=A_i\boldsymbol{i}+B_i\boldsymbol{j}+C_i\boldsymbol{k}$$

它们与几何约束的微分形式（式（1.1.10）和式（1.1.11））有相同的形式。因为是可积分的运动约束，即式（1.1.12）和式（1.1.13）满足可积分的条件（详见 1.1.6），或者说，此二式可以写成某个函数 F 的全微分，所以，它们可以积分成为有限形式的约束方程

$$F(\boldsymbol{r}_i, t) = C$$

$$F(x_i, y_i, z_i, t) = C$$

式中 C 为积分常数。

由此看出：①线性可积分的运动约束不仅对非自由质点系各质点的运动速度有限制，同时，对该质点系的位形也有相应的限制；②线性可积分的运动约束的有限形式是几何约束的一个族，至于它是该族中的哪一个，则应根据运动的初始条件来确定。这表明：线性可积分的运动约束可以变换为对应的几何约束。

1.1.4.2 非完整约束

在力学中，不可积分的运动约束称为**非完整约束**。本书涉及的只限于线性的非完整约束，其约束方程的一般形式为式（1.1.12）和式（1.1.13），但不满足可积分的条件。

1.1.5 完整系统 非完整系统

1.1.5.1 完整系统

如果某质点系所受的约束都是完整约束，这个质点系称为**完整系统**，简称**完整系**。在本书的第三篇中，将集中讨论完整系统的动力学问题。

设某完整系统由 n 个质点组成，内有 d 个完整约束，约束方程的有限形式和微分形式分别为式（1.1.1）、式（1.1.2）、式（1.1.10）和式（1.1.11），即

$$f_\alpha(\boldsymbol{r}_i, t) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, d) \tag{1.1.14}$$

$$f_\alpha(x_i, y_i, z_i, t) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, d) \tag{1.1.15}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\mathrm{d}t = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, d) \tag{1.1.16}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}\mathrm{d}y_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}\mathrm{d}z_i\right) + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\mathrm{d}t = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, d) \tag{1.1.17}$$

1.1.5.2 非完整系统

某质点系所受的约束中只要有非完整约束，这个质点系就称为**非完整系统，简称非完整系**。在本书的第四篇中，将集中讨论非完整系统的动力学问题。

设某非完整系统由 n 个质点组成，内有 d 个完整约束，g 个非完整约束。d 个完整约束方程的有限形式和微分形式为式（1.1.14）～式（1.1.17），g 个非完整约束方程只有微分形式，为式（1.1.12）和式（1.1.13），即

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Psi}_{\beta i} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i + A_\beta \mathrm{d}t = 0$$
$$(\beta = d+1, d+2, \cdots, d+g) \tag{1.1.18}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (A_{\beta i} \mathrm{d}x_i + B_{\beta i} \mathrm{d}y_i + C_{\beta i} \mathrm{d}z_i) + A_\beta \mathrm{d}t = 0$$
$$(\beta = d+1, d+2, \cdots, d+g) \tag{1.1.19}$$

比较式（1.1.16）和式（1.1.18）、式（1.1.17）和式（1.1.19）可以看出，它们有相同的形式，差异仅在于：完整约束方程（式（1.1.16）和式（1.1.17））是非完整约束方程（式（1.1.18）和式（1.1.19））的全微分的情形。正因如此，在非完整系统中，所有的约束方程可以用统一的形式表示，即

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Psi}_{\beta i} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i + A_\beta \mathrm{d}t = 0 \quad (\beta = 1, 2, \cdots, d+g) \tag{1.1.20}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (A_{\beta i} \mathrm{d}x_i + B_{\beta i} \mathrm{d}y_i + C_{\beta i} \mathrm{d}z_i) + A_\beta \mathrm{d}t = 0$$
$$(\beta = 1, 2, \cdots, d+g) \tag{1.1.21}$$

对于该系统中的 d 个完整约束，式中的系数分别为

$$\boldsymbol{\Psi}_{\beta i} = \frac{\partial f_\beta}{\partial \boldsymbol{r}_i}, \quad A_{\beta i} = \frac{\partial f_\beta}{\partial x_i}, \quad B_{\beta i} = \frac{\partial f_\beta}{\partial y_i}, \quad C_{\beta i} = \frac{\partial f_\beta}{\partial z_i}, \quad A_\beta = \frac{\partial f_\beta}{\partial t}$$
$$(\beta = 1, 2, \cdots, d), \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.1.22}$$

1.1.6 线性运动约束可积条件简介

在分析力学中，有些动力学方程和原理只适用于完整系统，因此，对于运动约束来说，判别它的可积性有着重要的意义。在这里，简单介绍线性运动约束（Pfaff 约束、线性一阶微分方程）可积条件的一些结论。

为便于叙述，这里不再区分位形变量和时间变量。如果线性运动约束方程的变量总数为 N 个，则它的统一形式（式（1.1.21））可写成

$$\sum_{i=1}^{N} A_i(r_1, r_2, \cdots, r_N)\mathrm{d}r_i = 0 \tag{1.1.23}$$

此式可积分的充分必要条件是

$$(A_\alpha, A_\beta, A_\gamma)\cdot(\nabla \times (A_\alpha, A_\beta, A_\gamma)) = 0 \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \cdots, N) \tag{1.1.24}$$

其中

$$(A_\alpha, A_\beta, A_\gamma) = A_\alpha \boldsymbol{i} + A_\beta \boldsymbol{j} + A_\gamma \boldsymbol{k} \tag{1.1.25}$$

$$\nabla \times (A_\alpha, A_\beta, A_\gamma) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial r_\alpha} & \dfrac{\partial}{\partial r_\beta} & \dfrac{\partial}{\partial r_\gamma} \\ A_\alpha & A_\beta & A_\gamma \end{vmatrix} \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \cdots, N) \tag{1.1.26}$$

式（1.1.24）的展开式为

$$A_\alpha\left(\frac{\partial A_\gamma}{\partial r_\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial r_\gamma}\right) + A_\beta\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial r_\gamma} - \frac{\partial A_\gamma}{\partial r_\alpha}\right) + A_\gamma\left(\frac{\partial A_\beta}{\partial r_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial r_\beta}\right) = 0$$
$$(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \cdots, N) \tag{1.1.27}$$

由此可以推导出下面三个结论。

1）式（1.1.23）只有三个变量，即当 $N = 3$ 的情形

令 α、β、γ 分别等于 1、2、3，则线性运动约束方程式（1.1.23）为

$$A_1(r_1,r_2,r_3)\mathrm{d}r_1+A_2(r_1,r_2,r_3)\mathrm{d}r_2+A_3(r_1,r_2,r_3)\mathrm{d}r_3=0 \tag{1.1.28}$$

此方程可积的充分必要条件是

$$(A_1,A_2,A_3)\cdot(\nabla\times(A_1,A_2,A_3))=0$$

或

$$A_1\left(\frac{\partial A_2}{\partial r_3}-\frac{\partial A_3}{\partial r_2}\right)+A_2\left(\frac{\partial A_3}{\partial r_1}-\frac{\partial A_1}{\partial r_3}\right)+A_3\left(\frac{\partial A_1}{\partial r_2}-\frac{\partial A_2}{\partial r_1}\right)=0 \tag{1.1.29}$$

2）式（1.1.23）只有两个变量，即当 $N=2$ 的情形

在式（1.1.29）中，令 $A_3=0$，$r_3=0$，则该式成为一恒等式，这表明：线性运动约束方程若能写成

$$A_1(r_1,r_2)\mathrm{d}r_1+A_2(r_1,r_2)\mathrm{d}r_2=0 \tag{1.1.30}$$

它一定是可积的。

3）$\nabla\times(A_\alpha,A_\beta,A_\gamma)=0$ 的情形

由式（1.1.24）可以看出，如果

$$\nabla\times(A_\alpha,A_\beta,A_\gamma)=0 \qquad (\alpha,\beta,\gamma=1,2,\cdots,N) \tag{1.1.31}$$

亦即

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial r_\beta}=\frac{\partial A_\beta}{\partial r_\alpha},\quad \frac{\partial A_\beta}{\partial r_\gamma}=\frac{\partial A_\gamma}{\partial r_\beta},\quad \frac{\partial A_\gamma}{\partial r_\alpha}=\frac{\partial A_\alpha}{\partial r_\gamma} \tag{1.1.32}$$

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$$

那么式（1.1.23）一定是可积的。

值得指出，某个线性运动约束方程如果不满足式（1.1.32）的条件，还不能够说它是不可积的。因为，如果它虽然不满足式（1.1.32）的条件，却满足式（1.1.24）或式（1.1.27）的条件，它仍然是可积的。这表明式（1.1.31）或式（1.1.32）只是线性运动约束方程可积的充分条件，并非必要条件。因此，在具体判别线性运动

约束方程是否可以积分时，多用充分必要条件，即式（1.1.24）或式（1.1.27）。

例1－1 试判别图1－1－4简单“跟踪系统”中约束的性质。

解：在1.1.3中已写出此系统的两个运动约束方程，这两个方程的形式相同，在这里只讨论第一个。

$$(x_B - x_A)\dot{y}_A - (y_B - y_A)\dot{x}_A = 0 \tag{a}$$

这是四个变量的约束方程，写成微分形式为

$$(x_B - x_A)\mathrm{d}y_A - (y_B - y_A)\mathrm{d}x_A + 0\mathrm{d}y_B + 0\mathrm{d}x_B = 0$$

该式与式（1.1.23）一一对应，则有

$$A_1 = (x_B - x_A), \qquad A_2 = -(y_B - y_A), \qquad A_3 = A_4 = 0$$

$$r_1 = y_A, \qquad r_2 = x_A, \qquad r_3 = y_B, \qquad r_4 = x_B$$

取 $\alpha=1$，$\beta=2$，$\gamma=3$ 代入式（1.1.27），有

$$\begin{aligned}
&A_1\left(\frac{\partial A_2}{\partial r_3} - \frac{\partial A_3}{\partial r_2}\right) + A_2\left(\frac{\partial A_3}{\partial r_1} - \frac{\partial A_1}{\partial r_3}\right) + A_3\left(\frac{\partial A_1}{\partial r_2} - \frac{\partial A_2}{\partial r_1}\right)\\
&= (x_B - x_A)(-1-0) - (y_B - y_A)(0-0) + 0\times(-1-1)\\
&= x_A - x_B \neq 0
\end{aligned}$$

由此可知，式（a）是不可积分的运动约束，此简单“跟踪系统”的约束属于非完整约束。

例1－2 试证明下面的约束是完整约束：

$$yz(y+z)\mathrm{d}x + zx(z+x)\mathrm{d}y + xy(x+y)\mathrm{d}z = 0$$

解：这是三个变量 $N=3$ 的约束方程，与式（1.1.28）对应，有

$$A_1 = yz(y+z), \qquad A_2 = zx(z+x), \qquad A_3 = xy(x+y)$$

$$r_1 = x, \qquad r_2 = y, \qquad r_3 = z$$

于是

$$\frac{\partial A_1}{\partial r_2} = z(y+z) + yz, \qquad \frac{\partial A_1}{\partial r_3} = y(y+z) + yz$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial r_3}=x(z+x)+zx,\qquad \frac{\partial A_2}{\partial r_1}=z(z+x)+zx$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial r_1}=y(x+y)+xy,\qquad \frac{\partial A_3}{\partial r_2}=x(x+y)+xy$$

将以上各式代入式（1.1.29），有

$$\begin{aligned}&yz(y+z)\{[x(z+x)+zx]-[x(x+y)+xy]\}\\&+zx(z+x)\{[y(x+y)+xy]-[y(y+z)+yz]\}\\&+xy(x+y)\{[z(y+z)+yz]-[z(z+x)+zx]\}=0\end{aligned}$$

从而证明了这个约束是完整约束。然而，在此约束方程中

$$\frac{\partial A_2}{\partial r_1}\neq\frac{\partial A_1}{\partial r_2},\qquad \frac{\partial A_3}{\partial r_2}\neq\frac{\partial A_2}{\partial r_3},\qquad \frac{\partial A_1}{\partial r_3}\neq\frac{\partial A_3}{\partial r_1}$$

它并不满足式（1.1.32）的条件。

1.2 广义坐标 自由度

1.2.1 广义坐标

1.2.1.1 广义坐标

如何描述质点系的位形呢？一种简单的方法是采用直角坐标来描述。在 1.1 中介绍约束时就是采用这种方法。设某质点系由 n 个质点组成，内有 d 个完整约束，g 个非完整约束。这种方法采用 n 个质点的 $3n$ 个直角坐标来描述该系统的位形，不过这 $3n$ 个坐标并非都是独立的，它们要受到 d 个完整约束的制约。至于非完整约束，由于它是不可积分的运动约束，对这些坐标没有直接的制约作用，因此，在这 $3n$ 个直角坐标系中，只有（$3n-d$）个坐标是独立的，应用起来并不方便，质点多、约束也多的时候更加明显。另一种方法是采用广义坐标来描述质点系的位形。

广义坐标是能够完全确定质点系位形的独立参变量，用符号 q_1，q_2，…表示。广义坐标是彼此独立的，应用方便，被广泛采用。在一

个质点系中，如何选择广义坐标，有一定的随意性，只要根据质点系的特点，选择那些能够惟一地确定该系统位形的参量就可以了。广义坐标可以是直角坐标系中的线坐标、极坐标和球坐标中的角坐标，也可以是其他参变量等等。在上面讨论的质点系中，有（$3n-d$）个独立的坐标，因此，可以选择的广义坐标的数目为

$$k=3n-d \tag{1.2.1}$$

既然直角坐标法和广义坐标法都可以描述质点系的位形，那么它们之间一定存在相互变换的关系，比较普遍的是将质点系各质点的直角坐标表述为广义坐标和时间的函数，即

$$\left.\begin{aligned}x_i=x_i(q_1,q_2,\cdots q_k,t)\\y_i=y_i(q_1,q_2,\cdots q_k,t)\\z_i=z_i(q_1,q_2,\cdots q_k,t)\end{aligned}\right\}\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{1.2.2}$$

或

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_1,q_2,\cdots,q_k,t)\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{1.2.3}$$

1.2.1.2　广义速率

在质点系中引入广义坐标之后，质点系的运动可以用广义坐标随时间的变化规律来描述。广义坐标随时间的变化规律为广义坐标的运动方程，即

$$q_\alpha=q_\alpha(t)\quad(\alpha=1,2,\cdots,k) \tag{1.2.4}$$

将式（1.2.2）和式（1.2.3）对时间求一阶导数，可以得到各质点的速度及其在直角坐标系中的投影，即

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{\alpha=1}^{k}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{1.2.5}$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_i=\sum_{\alpha=1}^{k}\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial x_i}{\partial t}\\\dot{y}_i=\sum_{\alpha=1}^{k}\frac{\partial y_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial y_i}{\partial t}\\\dot{z}_i=\sum_{\alpha=1}^{k}\frac{\partial z_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial z_i}{\partial t}\end{aligned}\right\}\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{1.2.6}$$

其中

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\mathrm{d}q_\alpha}{\mathrm{d}t} \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,k) \tag{1.2.7}$$

是广义坐标的时间变化率，称为**广义速率**。

1.2.1.3 用广义坐标表示的非完整约束方程

广义坐标是确定质点系位形的独立参变量，任意一组广义坐标的数值对应着此质点系的一个位形，在1.1.4中用直角坐标建立起来的质点系的位形限制条件——完整约束方程，对该质点系的广义坐标是没有制约作用的。如果把用广义坐标表述的各质点的直角坐标表达式（式（1.2.2））代入该系统的完整约束方程（式（1.1.15）），将构成一个恒等式，这表明：一般地说不存在用广义坐标表示的完整约束方程。

非完整约束方程则有所不同，它不可积分，只有微分形式或线性一阶导数的形式。假设某质点系由 n 个质点组成，内有 d 个完整约束，g 个非完整约束，它就有 $k=3n-d$ 个广义坐标，非完整约束方程的形式为式（1.1.5）和式（1.1.6），即

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Psi}_{\beta i} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i + A_\beta = 0 \qquad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{1.2.8}$$

或

$$\sum_{i=1}^{n} (A_{\beta i}\dot{x}_i + B_{\beta i}\dot{y}_i + C_{\beta i}\dot{z}_i) + A_\beta = 0 \qquad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{1.2.9}$$

其中

$$\boldsymbol{\Psi}_{\beta i} = A_{\beta i}\,\boldsymbol{i} + B_{\beta i}\,\boldsymbol{j} + C_{\beta i}\,\boldsymbol{k} \tag{1.2.10}$$

将式（1.2.5）代入式（1.2.8），整理后得

$$\sum_{\alpha=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Psi}_{\beta i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)\dot{q}_\alpha + \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Psi}_{\beta i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} + A_\beta\right) = 0 \qquad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{1.2.11}$$

令

$$\left.\begin{aligned} a_{\beta\alpha} &= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Psi}_{\beta i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha} \\ a_\beta &= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Psi}_{\beta i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} + A_\beta \end{aligned}\right\} \quad (\beta = 1,2,\cdots,g) \qquad (1.2.12)$$

将式（1.2.12）代入式（1.2.11），得

$$\sum_{\alpha=1}^{k} a_{\beta\alpha} \dot{q}_\alpha + a_\beta = 0 \qquad (\beta = 1,2,\cdots,g) \qquad (1.2.13)$$

这是用广义坐标表述的非完整约束方程。如果在其等号两侧同乘以 $\mathrm{d}t$，则可获得用广义坐标表示的非完整约束方程的微分形式，即

$$\sum_{\alpha=1}^{k} a_{\beta\alpha} \mathrm{d}q_\alpha + a_\beta \mathrm{d}t = 0 \qquad (\beta = 1,2,\cdots,g) \qquad (1.2.14)$$

其中 $a_{\beta\alpha}$、a_β 是广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 和时间 t 的函数。它们的矢量表述形式如式（1.2.12）。将式（1.2.10）代入式（1.2.12），则可得它们的坐标分析表达式为

$$\left.\begin{aligned} a_{\beta\alpha} &= \sum_{i=1}^{n} \left(A_{\beta i} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} + B_{\beta i} \frac{\partial y_i}{\partial q_\alpha} + C_{\beta i} \frac{\partial z_i}{\partial q_\alpha} \right) \\ a_\beta &= \sum_{i=1}^{n} \left(A_{\beta i} \frac{\partial x_i}{\partial t} + B_{\beta i} \frac{\partial y_i}{\partial t} + C_{\beta i} \frac{\partial z_i}{\partial t} + A_\beta \right) \end{aligned}\right\} \qquad (1.2.15)$$

$$(\alpha = 1,2,\cdots,k), (\beta = 1,2,\cdots,g)$$

1.2.2 坐标变分

在分析力学中涉及到的变分都是等时变分。

1.2.2.1 直角坐标变分

假设在给定的运动初始条件下，某质点系的运动微分方程组的解已经求得，为

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \cdots, q_k, t) = x_i(t) \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \cdots, q_k, t) = y_i(t) \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \cdots, q_k, t) = z_i(t) \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

这是各质点的运动方程。针对某一瞬时 t，可解得各质点对应的坐标值。这些坐标值的集合就是该质点系在此瞬时的位形，称为此质点系的真实位形。很明显，它们既满足该质点系的运动微分方程和运动初始条件，又满足该质点系的各个约束方程。

坐标的无限小的变化称为**坐标的微分**，它等于质点运动的速度在此坐标轴上的投影与时间的无限小增量的乘积，即

$$dx_i = \dot{x}_i dt, \qquad dy_i = \dot{y}_i dt, \qquad dz_i = \dot{z}_i dt$$
$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

在分析力学中，除了质点系的真实运动以外，还要讨论与真实运动有联系的可能运动。

在质点系中，为约束允许的运动称为可能运动，它与该质点系的受力状况和运动初始条件无关。各质点的可能运动也可以表述为时间和广义坐标的函数，即

$$\left.\begin{aligned} x_i^* &= x_i^*(q_1, q_2, \cdots, q_k, t) \\ y_i^* &= y_i^*(q_1, q_2, \cdots, q_k, t) \\ z_i^* &= z_i^*(q_1, q_2, \cdots, q_k, t) \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

比较同一瞬时同一质点的真实运动和与它相邻的可能运动，并限定二者的差值为一无限小量，即

$$\delta x_i = x_i^* - x_i, \qquad \delta y_i = y_i^* - y_i, \qquad \delta z_i = z_i^* - z_i$$
$$(i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.2.16}$$

δx_i、δy_i、δz_i 称为直角坐标 x_i、y_i、z_i 的变分，简称**坐标变分**。可以看出，坐标变分是在某瞬时、时间被“凝固”后，由于非时间参量的无限小变化而引起的各坐标的无限小的增量，它包含了质点系在同一瞬时其真实运动与可能运动的差异。

1.2.2.2 广义坐标变分

与前面讨论直角坐标变分一样，设某质点系的微分方程组已经解得，它的广义坐标运动方程为 $q_\alpha = q_\alpha(t)$，它的广义速率 $\dot{q}_\alpha$ 为式

(1.2.7)，于是广义坐标的全微分为

$$\mathrm{d}q_\alpha = \dot{q}_\alpha \mathrm{d}t \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,k)$$

同样，广义坐标也有它的可能运动方程

$$q_\alpha^* = q_\alpha^*(t) \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,k)$$

比较同一瞬时广义坐标的真实运动和与其相邻的可能运动，并限定二者的差值为无限小量，即

$$\delta q_\alpha = q_\alpha^* - q_\alpha \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,k) \qquad (1.2.17)$$

δq_α 称为**广义坐标变分**。由于广义坐标是确定质点系位形的独立参变量，因此，广义坐标变分是在某瞬时广义坐标本身的无限小增量。也可以说，广义坐标变分是在某瞬时、时间被“凝固”后，广义坐标本身的无限小增量。

变分的运算规则与微分的运算规则相似，重要的差别在于“等时”性，即 $\delta t = 0$ 的特点。

1.2.3 自由度

在分析力学中，**质点系的自由度**被定义为该系统独立坐标变分的数目。

1.2.3.1 完整系统的情形

设某质点系由 n 个质点组成，内有 d 个完整约束，约束方程为

$$f_\alpha(x_i, y_i, z_i, t) = 0$$

$$(i = 1,2,\cdots,n),(\alpha = 1,2,\cdots,d)$$

如 1.2.1 中所述，该系统有 $3n$ 个直角坐标，并受到 d 个完整约束方程的制约，这 $3n$ 个坐标中，只有 $k = 3n - d$ 个是独立的变量，需要用 k 个广义坐标才能确定此质点系的位形。

在完整系统中还可以得到与上式相对应的 d 个微分形式的约束方程，即

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}\mathrm{d}y_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}\mathrm{d}z_i\right) + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\mathrm{d}t = 0 \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,d)$$

这是在真实运动中，各质点的位移增量 $\mathrm{d}x_i$、$\mathrm{d}y_i$、$\mathrm{d}z_i$ 应满足的约束方程。通过变分可将该系统的真实位形过渡到与它相邻的可能位形中去。如上所述，变分的运算规则与微分运算规则相似，差异仅在"等时"上。用 δx_i、δy_i、δz_i 代替 $\mathrm{d}x_i$、$\mathrm{d}y_i$、$\mathrm{d}z_i$，并令 $\delta t = \mathrm{d}t = 0$，得

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0 \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,d)$$

(1.2.18)

上式为完整系统的坐标变分应满足的约束方程。

在由 n 个质点组成的完整系统中，坐标变分一共有 $3n$ 个，它们要受到 d 个约束方程（式（1.2.18））的制约，因此，完整系统中独立的坐标变分的数目，即自由度

$$f = 3n - d \tag{1.2.19}$$

此式与式（1.2.1）相同。由此可知，完整系统的独立坐标变分的数目等于独立坐标的数目，它的广义坐标变分都是独立的，完整系统的自由度等于它的广义坐标的数目。

1.2.3.2 非完整系统的情形

设某非完整系统由 n 个质点组成，内有 d 个完整约束，g 个非完整约束。首先，该系统要受到 d 个完整约束的制约，如上所述，它需要用 $k = 3n - d$ 个独立坐标或广义坐标来描述它的位形，因此，该系统有 k 个独立坐标或广义坐标，广义坐标变分也有 k 个。其次，该系统还要受 g 个非完整约束的制约。为简化起见，将这些方程写成用广义坐标表述的形式（式（1.2.14）），即

$$\sum_{\alpha=1}^{k} a_{\beta\alpha}\mathrm{d}q_\alpha + a_\beta \mathrm{d}t = 0 \qquad (\beta = 1,2,\cdots,g)$$

其中 $a_{\beta\alpha}$、a_β 都是时间 t 和广义坐标 q_1，q_2，…，q_k 的函数。由式（1.2.12）或式（1.2.15）可确定，上式是在真实运动中广义坐标的增量 $\mathrm{d}q_\alpha$ 应满足的约束方程。与完整系统的情形一样，通过变分可以得到与上式相对应的非完整约束的变分方程

$$\sum_{\alpha=1}^{k} a_{\beta\alpha}\delta q_{\alpha} = 0 \qquad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{1.2.20a}$$

或

$$a_{\beta 1}\delta q_1 + a_{\beta 2}\delta q_2 + \cdots + a_{\beta k}\delta q_k = 0 \qquad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{1.2.20b}$$

这是非完整系统中广义坐标变分应满足的非完整约束方程。

然后，可以对非完整系统的某些特征作出如下的表述：如果非完整系统由 n 个质点组成，内有 d 个完整约束，g 个非完整约束，那么，①该系统有 $3n$ 个直角坐标，而独立的坐标或广义坐标的数目只有 $k=3n-d$ 个；②该系统有 $3n$ 个直角坐标变分，k 个广义坐标变分，而独立的坐标变分的数目只有（$k-g$）个，广义坐标变分并非都是独立的；③该系统的自由度等于它的独立坐标变分的数目，即

$$f = k - g = 3n - d - g \tag{1.2.21}$$

它小于广义坐标的数目。

1.3 位形空间　状态空间　相空间

在分析研究质点系的机械运动中，既要着力于运动的物理性质，又要注意运动的几何表现。在这一节里，将引入抽象的多维空间（包括位形空间、状态空间和相空间）的概念，把质点系的位形、运动状态与多维空间中的点建立一一对应的关系，通过几何类比的方法，把质点系的动力学现象用几何语言加以概括，作为研究质点系运动的辅助手段。

1.3.1 位形空间

1.3.1.1 自由质点系的位形空间

1）自由质点的情形

一个质点的位形就是这个点在空间的位置。为了描述一个自由质

点 M_0 的位置，需要建立一个三维的欧几里得（Euclid）空间，用质点在此空间中的三个笛卡儿（Cartesian）坐标，即直角坐标 x_1，x_2，x_3 就可以确定此点的位置。

用这个点的三个坐标 x_1，x_2，x_3 构成一正交的三维空间，这个空间称为此质点的**位形空间**。可以看出，自由质点的位形空间就是三维的欧几里得空间。任意瞬时质点 M_0 在现实空间中的位置，由位形空间中的一个点 M 与之对应，这个点称为位形点。如图 1－3－1 所示，二者吻合，质点 M_0 在现实空间中的运动与位形点 M 在位形空间的运动，也相互吻合。在此空间中，无限小线段长（或弧长元素）的平方

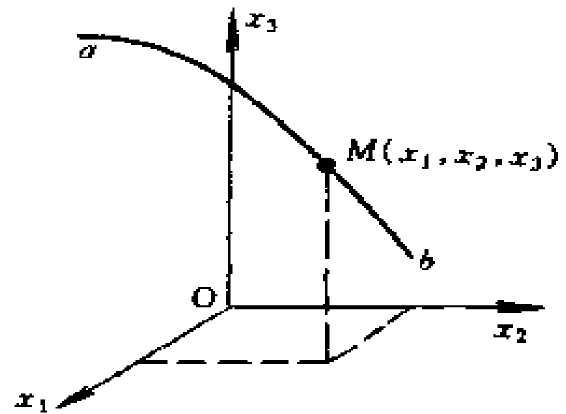


图 1－3－1

$$(\mathrm{d}s)^2=(\mathrm{d}x_1)^2+(\mathrm{d}x_2)^2+(\mathrm{d}x_3)^2 \qquad (1.3.1)$$

称为距离的度量。此式不因坐标轴的平移而变化，也不因坐标轴的旋转而变化，前者反映了欧几里得空间的均匀性，后者反映了它的等向性。

2）自由质点系的情形

设某自由质点系由 n 个质点组成，这 n 个点的位置的有序集合称为该质点系的位形。在现实空间中，需要用 $3n$ 个坐标 x_1，x_2，…，x_{3n}来描述此质点系的位形，因此，位形是 $3n$ 个实数 x_1，x_2，…，x_{3n}的有序的集合。

用这个质点系的 $3n$ 个坐标 x_1，x_2，…，x_{3n}构成一正交的 $3n$ 维空间，这个抽象的空间称为此质点系的位形空间，简称 x 空间。位形空间中的任意一个点对应于此质点系的一个位形，因此称为**位形点**，它的坐标就是 $M(x_1,x_2,\cdots,x_{3n})$。由此看出，位形空间是一个密集点的集合，不能用三维的图形画出来，只能去想像它。为了便于理解，画出它的示意图，如图 1－3－2 所示。质点系的运动规律，即

其位形随时间变化的规律由

$$x_i = x_i(t) \qquad (i = 1,2,\cdots,3n) \qquad (1.3.2)$$

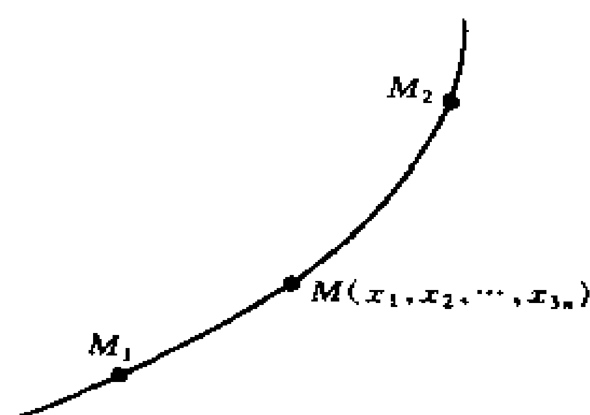


图 1－3－2

描述。按照此规律，质点系在现实空间中由某一位形连续运动到另一位形，此过程在位形空间中，即在图1－3－2中的映射则是位形点 M 由 M_1 点连续变化到 M_2 点，形成一条曲线 $\widehat{M_1M_2}$，此曲线称为**位形轨线**。

在此位形空间中无限小线段长（或弧长元素），即距离的度量被规定为

$$(\mathrm{d}s)^2 = \sum_{i=1}^{3n}(\mathrm{d}x_i)^2 \qquad (1.3.3)$$

与在自由质点情形中一样，它反映了该位形空间具有均匀性和等向性。

1.3.1.2　非自由质点系的位形空间

1）非自由质点的情形

设某质点 M_0 所受的约束是定常的完整约束，它的运动轨迹是某固定曲面 S 上的一条空间曲线 $\widehat{a_0b_0}$，如图 1－3－3 所示。此质点在曲面 S 上的位置可以用三个直角坐标 x_1，x_2，x_3 来确定，不过这三个坐标并非都是独立的，独立的坐标数只有两个。

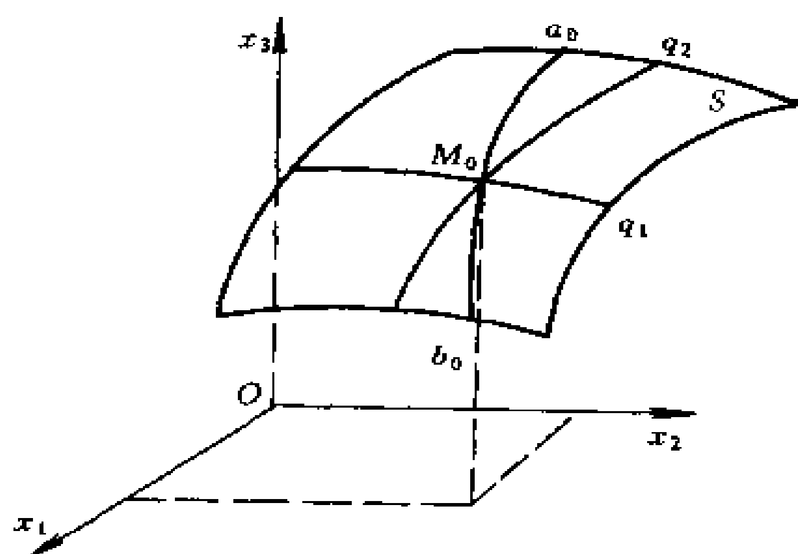


图 1－3－3

如同在自由质点的情形那样，用这三个坐标构成此质点的位形空

间，不过，非自由质点的这个位形空间与自由质点的不同，由于它的三个坐标轴只有两个是独立的，位形点在其空间中的运动是受约束的（在自由质点中，位形点的运动是自由的），这给应用带来不便，从而引出了另一种表述方法。

在固定的曲面 S 上选取两根正交的二维空间曲线坐标 q_1, q_2，用它来确定质点 M_0 在曲面上的位置。空间曲线坐标 q_1, q_2 张成的空间（即曲面的延拓）称为三维欧几里得空间中的二维子空间。在这里，直角坐标 x_1, x_2, x_3 和曲线坐标 q_1, q_2 之间的变换关系为

$$x_1 = x_1(q_1, q_2), \quad x_2 = x_2(q_1, q_2), \quad x_3 = x_3(q_1, q_2) \tag{1.3.4}$$

而质点的无限小线段长（或弧长元素），即距离的度量

$$(\mathrm{d}s)^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\mathrm{d}q_j\mathrm{d}q_k$$

或

$$(\mathrm{d}s)^2 = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} g_{jk}\mathrm{d}q_j\mathrm{d}q_k \tag{1.3.5}$$

其中

$$g_{jk} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \tag{1.3.6}$$

称为曲面 S 的度量系数。它是曲线坐标 q_1，q_2 的函数，随着 q_1，q_2 的不同取值，度量系数 g_{jk} 的值也将不同，于是，曲线坐标 q_1，q_2 张成的二维子空间不再具有均匀性和等向性，它属于更一般的黎曼（Riemann）空间。

用质点 M_0 的两个坐标 q_1, q_2 张成一正交的二维空间，称为此质点的位形空间，如图 1－3－4 所示。任意瞬时，质点 M_0 在现实空间中的位置映射到位形空间则是位形点 $M(q_1, q_2)$。在现实空间中，质点 M_0 沿任一轨迹 $\widehat{a_0b_0}$ 的可能运动映射到此位形空间中，则是位形点

M 沿位形轨线$\widehat{ab}$的连续运动。

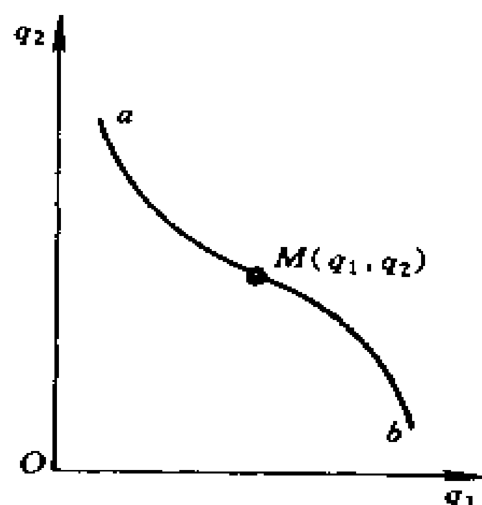


图 1－3－4

2）非自由质点系的情形

设某质点系由 n 个质点组成，内有 d 个定常的完整约束，相当于此质点系在 d 个空间曲面组成的超曲面上运动。由式（1.2.1）和式（1.2.19）知，此质点系的独立的坐标数和自由度 $k=f=3n-d$。在各质点的 $3n$ 个直角坐标 x_1，x_2，…，x_{3n} 中，只有（$3n-d$）个坐标是独立的。在此情况下，构造此质点系的位形空间有以下两种方法。

一种是用 $3n$ 个直角坐标 x_1，x_2，…，x_{3n}张成一正交的 $3n$ 维空间，作为此质点系的位形空间，简称 x 空间，不过这个空间的 $3n$ 维坐标中，只有（$3n-d$）维是独立的，于是，质点系的位形点在 x 空间的运动是受约束的，这样，将给应用带来不便。

另一种是恰当地选择质点系的（$3n-d$）个广义坐标 q_1，q_2，…，q_{3n-d}。用这（$3n-d$）个广义坐标在 x 空间中张成一（$3n-d$）维子空间，作为此质点系的位形空间，简称 q 空间。由于此子空间的（$3n-d$）个坐标都是独立的，质点系的位形点在 q 空间中的运动是自由的，从而获得广泛的应用。

在这里，x 空间的坐标 x_1，x_2，…，x_{3n}与 q 空间的坐标 q_1，q_2，…，q_{3n-d}之间的变换关系为

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1,q_2,\cdots,q_{3n-d}) \\ x_2 &= x_2(q_1,q_2,\cdots,q_{3n-d}) \\ &\vdots \\ x_{3n} &= x_{3n}(q_1,q_2,\cdots,q_{3n-d}) \end{aligned}\right\} \tag{1.3.7}$$

x 空间具有均匀性和等向性，q 空间则没有这种属性。

由 1.2.1 知，质点系的运动可以用广义坐标随时间的变化规律来描述，即

$$q_a = q_a(t) \qquad (a = 1,2,\cdots,3n-d)$$

在现实空间中，质点系按照此规律由某一位形连续运动到另一位形，此过程在位形 q 空间，即在图 1－3－5 中的映射是：位形点 M 由 M_1 点连续运动到 M_2 点形成位形轨线 $\widehat{M_1M_2}$。

1.3.1.3 归纳

综上所述，可以对位形空间的特征做如下归纳。

设某质点系由 n 个质点组成，内有 d 个定常的完整约束，如果 $n=1$，则为质点的情形，如果 $d=0$，则是自由质点系的情形。因而可以概括上述四种情形。

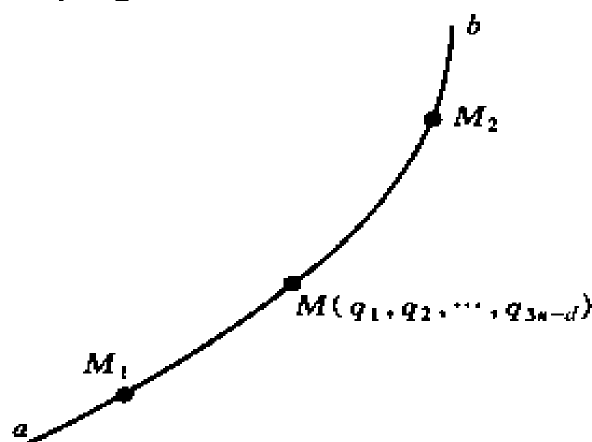


图 1－3－5

(1) 位形空间是用现实空间中描述质点系位形的诸坐标张成的抽象的多维空间。根据所用坐标的不同类型，位形空间有两种形式。

①用描述质点位形的直角坐标 x_1，x_2，…，x_{3n} 张成的 $3n$ 维位形空间，称为 x 空间 。x 空间具有均匀性和等向性。

②用描述质点系位形的广义坐标 q_1，q_2，…，q_{3n-d} 张成的 $(3n-d)$ 维位形空间，称为 q 空间。q 空间不具有均匀性和等向性。

x 空间是欧几里得空间，q 空间是 x 空间内的一个子空间，它们之间的变换关系为式 (1.3.7)。

(2) 质点系在现实空间中的一个位形映射到位形空间是一个点，因而，将位形空间中的几何点称为位形点。这表明位形空间是密集的点的集合。在 x 空间中，位形点的坐标是 $M(x_1,x_2,\cdots,x_{3n})$，它的运动是受约束的，相当于位形点在此空间中的 $3n-d$ 维超曲面上运动；在 q 空间中，位形点的坐标是 $M(q_1,q_2,\cdots,q_{3n-d})$，它的运动是自由的。

（3）在现实空间中，质点系按照自身的运动规律由一个位形连续运动到另一个位形，此过程在位形空间的映射是，位形点 M 由 M_1 点到 M_2 点，构成一条连续的位形轨线。由此看出，位形点在位形空间中的运动表征着此质点系位形的变化。

（4）在一般情况下，位形空间中的一个几何点映射着质点系在现实空间中的一个位形；位形空间中的一条位形轨线映射着质点系在现实空间中由一个可能位形运动到另一可能位形的过程。值得注意的是：在现实空间中，两个质点是不能同时占据同一几何点的，因此，对位形空间中的某个位形点来说，如果它的坐标元素有相同数值的时候，在现实空间中就没有与这种位形点相对应的可能位形。

1.3.2 状态空间 相空间

1.3.2.1 状态空间

设某质点系由 n 个质点组成，内有 d 个定常的完整约束。在任意瞬时，将此质点系的（$3n-d$）个位形坐标 q_1，q_2，…，q_{3n-d}和（$3n-d$）个速率 $\dot{q}_1$，$\dot{q}_2$，…，$\dot{q}_{3n-d}$有序地联合在一起，称为质点系在此时的“状态”，因此，质点系的状态是由$2(3n-d)$个实数组成的有序集合。

用质点系的（$3n-d$）个位形坐标 q_α 和（$3n-d$）个速率坐标 $\dot{q}_\alpha$（$\alpha=1，2，\cdots，3n-d$）张成一正交的$2(3n-d)$维空间，用它来表述质点系的运动状态，这个空间称为**状态空间**，简称 **s 空间**。在任意瞬时，质点系在现实空间中的位形及其速度的分布情况——质点系在此时的状态，在状态空间中的映射是一个几何点，称为状态点。当质点系的状态按照自身的运动规律随时间而变化时，此运动过程在状态空间中的映射则描绘出了状态点变化的轨迹。状态空间中的这条曲线称为质点系的**状态轨线**。

在一般的情况下，状态空间中的每个状态点对应着质点系的一个可能的状态。但需注意，如同位形空间一样，由于现实空间中两个质点不能同时占据同一个几何点，因此，对于状态空间中的某个状态点来说，如果它的位形坐标元素有相同的数值时，在现实空间中就没有

与这种状态点相对应的可能的状态。

还应注意的是，状态空间中的任意一条状态轨线不一定能代表质点系的一个可能的运动（可能状态的变化过程）。其原因在于，对于任意一条状态轨线来说，它制约着位移坐标 q_a、速率 $\dot{q}_a$ 之间的关系，然而，质点系的可能运动未必能够满足这种关系。

为了对状态空间有一个概略的了解，举例说明如下。

一长度为 l 的定长单摆，在图 1-3-6（a）所示铅直平面内摆动，这是一个平面问题。有一个质点、一个定常的几何约束，它的独立坐标数和自由度相等，$k = f = 2n - d = 2\times1 - 1 = 1$，是一个自由度的系统。选取摆与铅直线（即静平衡位置）的夹角 φ 为广义坐标，它的运动微分方程为（参见例 4-1）

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

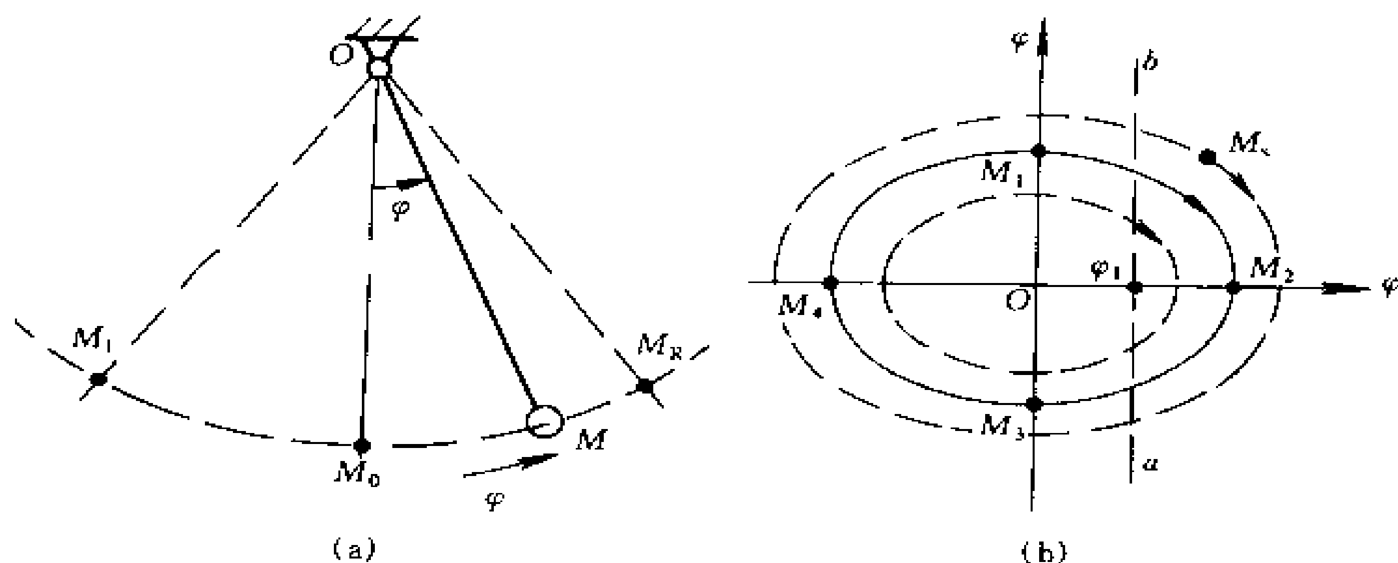


图 1-3-6

这是一个自由度的非线性振动问题，今后会对它作完整的解析论证。在这里仅结合状态空间概略地对它作定性的说明。

在任意瞬时，摆的广义坐标、广义速率分别为 φ、$\dot{\varphi}$，因而它的状态空间蜕化为二维状态平面，如图 1-3-6（b）所示。

假设此摆在运动中的最大摆角为 φ_m，最大角速度为 $\dot{\varphi}_m$，它的运

动过程如下。在图（a）中，摆锤 M 从其静平衡位置 M_0，即 $\varphi=0$ 处，以初速率 $\varphi=\varphi_m$ 开始逆时针摆动。φ 逐渐增大，$\dot{\varphi}$ 逐渐减小，至 $\varphi=0$ 时，$\varphi=\varphi_m$，为 M_R 位置；随后，变为顺时针摆动，$\dot{\varphi}$ 变负，其绝对值逐渐增大，φ 逐渐减小，至 $\varphi=0$ 时，$\dot{\varphi}=-\varphi_m$，回到 M_0 位置，接着，φ 变负，其绝对值逐渐增大，$\dot{\varphi}$ 的绝对值逐渐减小，至 $\dot{\varphi}=0$ 时，$\varphi=-\varphi_m$，为 M_L 位置；然后，再次变为逆时针摆动，$\dot{\varphi}$ 变正，逐渐增大，φ 的绝对值逐渐减小，至 $\varphi=0$ 时，$\dot{\varphi}=\varphi_m$，又回到 M_0 位置，完成一个周期的振动。这个过程在状态平面上的映射如图（b）所示，与 $M_0(0,\dot{\varphi}_m)$ 对应的状态点为 $M_1(0,\dot{\varphi}_m)$，与 $M_R(\varphi_m,0)$ 对应的是 M_2（φ_m，0），与 $M_0(0,-\varphi_m)$、$M_L(-\varphi_m,0)$ 对应的是 $M_3(0,\ \dot{\varphi}_m)$、$M_4(-\varphi_m,0)$，即在状态平面上描绘出由 M_1 开始顺时针转动，经 M_2、M_3、M_4 再回到 M_1 构成一封闭的状态轨线——椭圆曲线。当摆的初始速率 φ_m 越大，则摆角 φ_m 也越大，在状态平面中所对应的椭圆的短轴 $\dot{\varphi}$、长轴 φ 也越大。因此，摆在现实空间的往复摆动映射到状态平面中则是一椭圆族。

如果在状态平面上选择任意点 M_s，一定能够找到相应的一个椭圆通过它，如图（b）所示，并在现实空间中找到对应的可能振动过程，在此振动过程中找到与 M_s 相同的状态、φ_s 和 $\dot{\varphi}_s$。

如果在状态平面上任意画一条状态轨线，例如画一条平行于 $\dot{\varphi}$ 轴的直线 ab，如图（b）所示，在此状态轨线上，$\varphi\equiv\varphi_1$，而 $\dot{\varphi}$ 却可以取任意值，φ、$\dot{\varphi}$ 的这种关系是此摆的运动无法满足的，即状态轨线 ab 不能代表摆的可能运动。

此例虽简单，却有一定的代表性。通过此例可以看出，状态空间适合于映射质点系的真实运动，不宜用来研究分析质点系的可能运动。

1.3.2.2 相空间

广义动量被定义为质点系的动能 T 对广义速率 $\dot{q}_\alpha$（$\alpha=1, 2, \cdots, 3n-d$）的偏导数，即

$$p_\alpha=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \qquad (\alpha=1,2,\cdots,3n-d)$$

其中动能 T 是广义坐标 q_α 和广义速率 $\dot{q}_\alpha$ 的函数。

在哈密顿（Hamilton）原理中，一般用广义坐标 q_α 和广义动量 p_α 表述质点系的状态。

用（$3n-d$）个广义坐标 q_1，q_2，…，q_{3n-d}和（$3n-d$）个广义动量 p_1，p_2，…，p_{3n-d}张成一正交的$2(3n-d)$维的空间，用来表述质点系的运动状态，这种空间称为**相空间**。相空间是上述状态空间的一种变形，具有状态空间所有的特性。

1.4 虚位移 虚速度

1.4.1 实位移 可能位移

1.4.1.1 实位移

质点或质点系在其真实的运动中，在一定的时间间隔内发生的位移称为该质点或质点系的**实位移**，通常用 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$ 表示质点系中的第 i 个质点的实位移。实位移是在一定的时间过程中发生的，如果时间间隔等于零，实位移也等于零。它既要满足该质点或质点系的动力学运动微分方程及运动的初始条件，又要满足该质点或质点系的约束方程。设某质点在一曲面上运动，在瞬时 t 和 $t+\mathrm{d}t$ 分别位于曲面上的 $M(x,y,z)$和$M'(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y,z+\mathrm{d}z)$点。这两个点的坐标均应满足此曲面的约束方程，即

$$f(x,y,z,t)=0$$

$$f(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y,z+\mathrm{d}z,t+\mathrm{d}t)=0$$

将上式在 M 点展成泰勒级数，略去二阶和二阶以上的各项，得

$$\begin{aligned}&f(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y,z+\mathrm{d}z,t+\mathrm{d}t)\\&=f(x,y,z,t)+\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z+\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t=0\end{aligned}$$

将曲面约束方程代入上式，得

$$\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z+\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t=0 \tag{1.4.1}$$

也可以写作

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}+\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t=0 \tag{1.4.2}$$

其中

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}}=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

这是此质点的实位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 及其在直角坐标系中的投影 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}z$ 应该满足的约束方程，这两个方程也可以从约束方程（式（1.1.1）和式（1.1.2））直接对时间求全微分得到。

如果一完整系统由 n 个质点组成，内有 d 个完整约束，g 个非完整约束，该系统各质点的实位移应满足统一的约束方程式（1.1.20）和式（1.1.21）。

1.4.1.2 可能位移

如1.2.2所述，质点或质点系只满足其约束条件的运动称为该质点或质点系的可能运动。在给定的瞬时和位形上，以及给定的时间间隔内，质点或质点系在可能运动中为约束允许的位移称为该质点或质点系的**可能位移**。通常用 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i^*$ 表示质点系中第 i 个质点的可能位移。可能位移是在一定时间过程中发生的，这一点与实位移相同，但是，它只满足约束方程，未必满足动力学运动微分方程和运动的初始条件。

设某质点在一曲面上作可能运动，在瞬时 t，它位于曲面的 $M(x^*, y^*, z^*)$点，经时间间隔 $\mathrm{d}t$，运动到 $M'(x^*+\mathrm{d}x^*, y^*+\mathrm{d}y^*, z^*+\mathrm{d}z^*)$，可能位移为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}^*=\mathrm{d}x^*\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y^*\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z^*\boldsymbol{k}$$

与实位移的情形一样，可以推导出可能位移应满足的约束方程

$$\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x^*+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y^*+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z^*+\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t=0 \tag{1.4.3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}^*+\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t=0 \tag{1.4.4}$$

如果某质点系的 n 个质点之间有 d 个完整约束，g 个非完整约束，各质点的可能位移要满足统一的约束方程，即

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\psi}_{\beta i} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i^* + A_\beta \mathrm{d}t = 0 \qquad (\beta = 1,2,\cdots,d+g)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(A_{\beta i}\mathrm{d}x_i^* + B_{\beta i}\mathrm{d}y_i^* + C_{\beta i}\mathrm{d}z_i^*) + A_\beta \mathrm{d}t = 0 \qquad (\beta = 1,2,\cdots,d+g)$$

由于上述约束方程的方程数目恒少于位移的数目，此质点系的可能位移有很多组，也就是说，实位移属于可能位移的范围，任一瞬时的可能位移未必是实位移。

1.4.2 虚位移

虚位移是分析力学中的一个重要概念，它与实位移、可能位移有本质的区别。

1.4.2.1 虚位移

在给定的瞬时和位形上，在约束允许的条件下，质点或质点系的无限小位移称为该点或质点系的**虚位移**，通常用 $\delta\boldsymbol{r}_i$ 表示质点系中第 i 个质点的虚位移。这里的"δ"是 1.2.2 中的等时变分符号。虚位移是虚设的无限小位移。它的给出无需力的作用或任何时间过程，是非时间参量的变化引起的，它对质点或质点系的特性，如平衡状态、运动状态、能量等等，不会带来任何影响。

设某质点在一曲面上运动，瞬时 t 它位于曲面上的$M(x,y,z)$点，由于虚位移是非时间参量引起的，相当于在此瞬时把时间"凝固"住，不再延续，即 $\delta t = \mathrm{d}t = 0$，此曲面也被"凝固"住，即使它是一个非定常约束，此时也被"凝固"为一定常约束，不再变动了。在此时、此位置上，给质点一虚位移 $\delta\boldsymbol{r}$（有时称为等时变更的位移），使它挪至$M'(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$点，其中 δx、δy、δz 为虚位移 $\delta\boldsymbol{r}$ 在直角坐标系上的投影，即

$$\delta\boldsymbol{r} = \delta x\boldsymbol{i} + \delta y\boldsymbol{j} + \delta z\boldsymbol{k} \tag{1.4.5}$$

也就是坐标 x、y、z 的变分。注意到虚位移是约束所允许的，而且

$\delta t=0$，M 点、M' 点的坐标都满足约束方程（式（1.1.2）），即

$$f(x,y,z,t)=0$$

$$f(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y,z+\mathrm{d}z,t)=0$$

将上式在 M 点展成泰勒级数，略去二阶和二阶以上的各项并将上述约束方程代入，得

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=0 \tag{1.4.6}$$

或

$$\frac{\delta f}{\delta \boldsymbol{r}}\cdot\delta\boldsymbol{r}=0 \tag{1.4.7}$$

其中

$$\frac{\delta f}{\delta \boldsymbol{r}}=\frac{\delta f}{\delta x}\boldsymbol{i}+\frac{\delta f}{\delta y}\boldsymbol{j}+\frac{\delta f}{\delta z}\boldsymbol{k}$$

式（1.4.6）和式（1.4.7）是质点在 M 点的虚位移应满足的约束方程。此方程也可以对约束方程（式（1.1.1）和式（1.1.2））求等时变分直接得到，还可以通过如下方式得到：在同一瞬时、同一位置上，在相同的时间间隔内，选取发生的任意两个可能位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}^*$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}^{**}$，注意到它们具有相同的条件，在它们应满足的约束方程式（1.4.4）中，系数$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}}$、$\frac{\partial f}{\partial t}$应该相同，取此二方程之差，即

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{r}^*-\mathrm{d}\boldsymbol{r}^{**})=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\delta\boldsymbol{r}=0$$

其中

$$\delta\boldsymbol{r}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}^*-\mathrm{d}\boldsymbol{r}^{**} \tag{1.4.8}$$

因此，有时亦将虚位移定义为在同一瞬时、同一位形上，在相同的时间间隔发生的任意两组可能位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}^*$、$\mathrm{d}\boldsymbol{r}^{**}$ 之差。

如果一质点系由 n 个质点组成，内有 d 个完整约束、g 个非完整约束，那么各质点的虚位移要满足统一的约束方程（式（1.1.20）

和式（1.1.21）），不过在这些方程中，应将微分符号改为变分符号，$\delta t = \mathrm{d}t = 0$，即

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\psi}_{\beta i} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \qquad (\beta = 1,2,\cdots,d+g) \tag{1.4.9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (A_{\beta i}\delta x_i + B_{\beta i}\delta y_i + C_{\beta i}\delta z_i) = 0$$
$$(\beta = 1,2,\cdots,d+g) \tag{1.4.10}$$

1.4.2.2 虚位移的几何性质

为方便起见，引入曲面$f(x,y,z,t)=0$在M点的单位法向矢量$\boldsymbol{n}$。如上所述，M点的虚位移是瞬时t把时间和曲面“凝固”后为约束允许的无限小位移，因此，曲面$f(x,y,z,t)=0$即使是非定常约束，在瞬时t也被“凝固”为定常约束，即有$f(x,y,z,t)=0$（t为常量）。由微分几何理论可知，对于定常约束曲面上的任一点的法线来说，它的三个方向余弦分别与该曲面在此点的偏导数$\frac{\partial f}{\partial x}$、$\frac{\partial f}{\partial y}$、$\frac{\partial f}{\partial z}$成正比，即此曲面的单位法向矢量$\boldsymbol{n}$可以写作

$$\boldsymbol{n} = C\left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \tag{1.4.11}$$

式中C为比例系数。对式（1.4.5）和式（1.4.11）作点积运算，再将式（1.4.6）代入，得

$$\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{r} = C\left(\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z\right) = 0 \tag{1.4.12}$$

这表明：在给定的瞬时，将时间和曲面“凝固”后，质点在曲面某一点上的虚位移垂直于此曲面在此点的法线，或者说，质点的虚位移位于被“凝固”曲面上某个点的切平面内，而这个点正是此质点所处的位置。虚位移是一个用来反映约束在给定瞬时的性质的几何概念。

1.4.3 虚位移与可能位移、实位移的关系

在定常约束的情况下，可能位移、实位移应满足的约束方程（式（1.4.4）和式（1.4.2））分别蜕化为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}^{*} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

与虚位移的约束方程（式（1.4.7））的形式相同，因此，在定常约束的情况下（还包括非定常约束中$\frac{\partial f}{\partial t}=0$的情形），可以把虚位移视为可能发生却尚未发生的可能位移，实位移是众多虚位移（亦是可能位移）中的一个。

在非定常约束的情况下，可能位移、实位移的约束方程（式（1.4.4）和式（1.4.2））与虚位移的约束方程（式（1.4.7））不同（前者多了$\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t$项），因此，在非定常约束（不包括$\frac{\partial f}{\partial t}=0$）的情形中，不能把虚位移视为可能发生，却尚未发生的可能位移，实位移是众多可能位移（不是虚位移）中的一个。

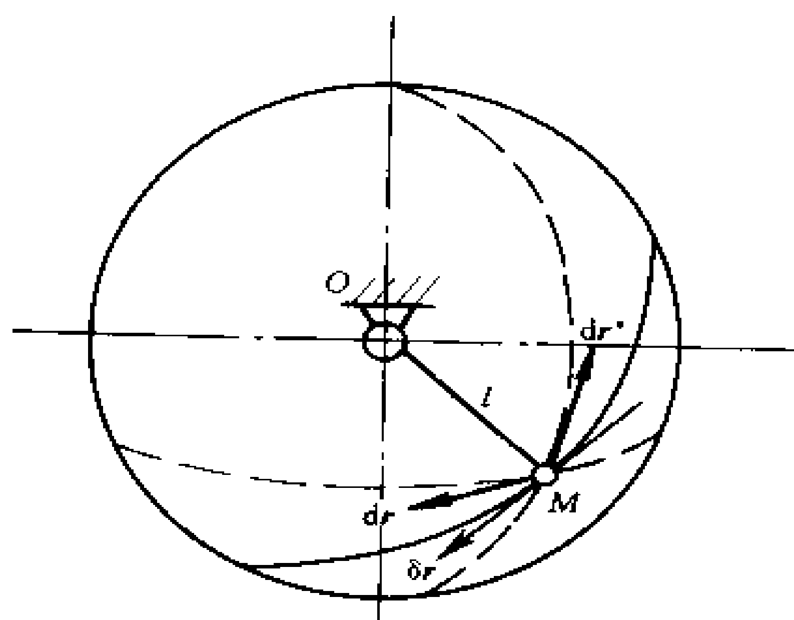


图 1－4－1

图 1－4－1 所示为一单摆，它的约束方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$

是一个半径为 l 的球面，属于定常几何约束。在某瞬时 t，此摆位于图 1－4－1 的 OM 位置，摆锤 M 的虚位移和可能位移都与 OM 垂直，它们是此球面在 M 点的切平面中通过 M 点的任意两个矢量 $\delta\boldsymbol{r}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}^{*}$。此时的实位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 也在此切平面内，可是，它的方位和指向则由 M 点（摆锤）的运动方程确定，不能任意设定。这表明：在定常约束中，虚位移可视为可能位移，实位移是众多虚位移（也是可能位移）中的一个。

图 1－4－2 所示是一个变长单摆，它的约束方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = (l_0 - ut)^2$$

图1-4-2

摆长 $l = OM = l_0 - ut$，随时间而变化，属于非定常几何约束。在瞬时 t，摆位于图1-4-2中的 OM 位置，M 在半径为 $l = l_0 - ut$ 的球面Ⅰ上；在瞬时 $t + \mathrm{d}t$，摆位于 OM' 位置，M' 在半径为 $l = l_0 - u(t + \mathrm{d}t)$ 的球面Ⅱ上。在由 M 至 M' 的可能运动中，M' 可以是球面Ⅱ上的任意一点，而在实位移中，摆锤在球面Ⅱ上的确切位置 M'，则要由摆锤的运动方程来确定，不能任意设定。这表明：可能位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}^* = \overline{MM}$ 和实位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \overline{MM'}$ 不垂直于 OM 了，实位移是众多可能位移中的一个。至于瞬时 t 时 M 点的虚位移 $\delta\boldsymbol{r}$ 则应这样来确定：在此时，把时间和曲面“凝固”住，曲面变为半径 $l = l_0 - ut$（这时的 t 是此瞬时的时间值，不再是变量了）不再变化的球面Ⅰ。M 点的虚位移 $\delta\boldsymbol{r}$ 垂直于 OM，它位于球面Ⅰ在 M 点的切平面内，并通过 M 点的任一无限小的位移。它与此瞬时 M 点的可能位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}^*$、实位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 不再类同了，这表明：在非定常约束中，虚位移不能视为可能位移，实位移也不是众多虚位移中的一个。

1.4.4 实速度 可能速度

设某质点系由 n 个质点组成，内有 d 个完整约束、g 个非完整约束，在某力系作用下运动。

1.4.4.1 实速度

质点系的**实速度**是它在其真实运动中的速度，通常用 $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 表示第 i 个质点的速度

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{v}_i = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t}$$

各质点的实速度既要满足该质点系的运动微分方程和运动初始条件，又要满足它的约束方程，其中完整约束方程为式（1.1.8）和式（1.1.9），非完整约束方程为式（1.1.5）和式（1.1.6），统一写为

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\psi}_{\beta i} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i + A_\beta = 0 \\ &\sum_{i=1}^{n} (A_{\beta i}\dot{x}_i + B_{\beta i}\dot{y}_i + C_{\beta i}\dot{z}_i) + A_\beta = 0 \\ &\boldsymbol{\psi}_{\beta i} = A_{\beta i}\boldsymbol{i} + B_{\beta i}\boldsymbol{j} + C_{\beta i}\boldsymbol{k} \end{aligned}\right\} \quad (\beta = 1,2,\cdots,d+g)$$

（1.4.13）

1.4.4.2 可能速度

质点系的**可能速度**是在其可能运动中的速度。通常用 $\dot{\boldsymbol{r}}_i^*$ 表示第 i 个质点的可能速度

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i^* = \boldsymbol{v}_i^* = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i^*}{\mathrm{d}t}$$

各质点的可能速度只需满足此质点系的约束方程，这些方程与式（1.4.13）类同，只需将式中的实速度 $\dot{\boldsymbol{r}}_i$、$\dot{x}_i$、$\dot{y}_i$、$\dot{z}_i$ 改为可能速度 $\dot{\boldsymbol{r}}_i^*$、$\dot{x}_i^*$、$\dot{y}_i^*$、$\dot{z}_i^*$，即

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\psi}_{\beta i} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i^* + A_\beta = 0 \\ &\sum_{i=1}^{n} (A_{\beta i}\dot{x}_i^* + B_{\beta i}\dot{y}_i^* + C_{\beta i}\dot{z}_i^*) + A_\beta = 0 \end{aligned}\right\} \quad (\beta = 1,2,\cdots,d+g)$$

（1.4.14）

由于约束方程式（1.4.14）的方程数目恒少于此质点系速度的数

目，所以，在给定的瞬时和位形上，质点系的可能速度有很多组，这是不同于实速度的。一般地说，实速度属于可能速度的范围，任意瞬时和位形上的可能速度未必是实速度。

由约束方程式（1.4.13）和式（1.4.14）可看出，实速度和可能速度不必限制为无限小量，它们可以是有限量。

1.4.5 虚速度

在1.3.2中，曾对虚位移做过这样的论述，在给定的瞬时和位形上，质点系的虚位移是约束允许的无限小的位移。它的给出，无需力或运动初始条件的作用，无需任何时间过程等等。现在，为了应用上的方便，可以认为所给出的虚位移 $\delta \boldsymbol{r}_i$ 经历了无限小的时间间隔 $\mathrm{d}t$，并把质点系第 i 个质点的**虚速度**定义为

$$\Delta \dot{\boldsymbol{r}}_i = \Delta v_i = \frac{\delta \boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} \tag{1.4.15}$$

式中的“Δ”代表有限变更，表明虚速度可以是有限量。

如果在虚位移的约束方程式（1.4.9）和式（1.4.10）的等号两侧同时除以 $\mathrm{d}t$，再将式（1.4.15）代入，可以得到虚速度的约束方程

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Psi}_{\beta i} \cdot \Delta \dot{\boldsymbol{r}}_i = 0 \\ &\sum_{i=1}^{n} (A_{\beta i} \Delta \dot{x}_i + B_{\beta i} \Delta \dot{y}_i + C_{\beta i} \Delta \dot{z}_i) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (\beta = 1, 2, \cdots, d+g) \tag{1.4.16}$$

其中

$$\Delta \dot{\boldsymbol{r}}_i = \Delta \dot{x}_i \boldsymbol{i} + \Delta \dot{y}_i \boldsymbol{j} + \Delta \dot{z}_i \boldsymbol{k} \tag{1.4.17}$$

虚速度的约束方程式（1.4.16）还可以通过以下方法得到：在同一瞬时、同一位形上，给出此质点系的任意两组可能速度 $\dot{\boldsymbol{r}}_i^*$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_i^{**}$，$\dot{\boldsymbol{r}}_i^*$、$\dot{\boldsymbol{r}}_i^{**}$ 应满足约束方程式（1.4.14）为

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Psi}_{\beta i} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i^* + A_\beta = 0 \tag{A}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\psi}_{\beta i}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i^{**}+A_\beta=0 \tag{B}$$

由于这两组可能速度具有相同的条件，式（A）、式（B）中的系数 $\boldsymbol{\psi}_{\beta i}$ 和 A_β 是相同的，取式（A）和式（B）之差，即

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\psi}_{\beta i}\cdot(\dot{\boldsymbol{r}}_i^{*}-\dot{\boldsymbol{r}}_i^{**})=0$$

或

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\psi}_{\beta i}\cdot\Delta\dot{\boldsymbol{r}}_i=0$$

其中

$$\Delta\dot{\boldsymbol{r}}_i=\dot{\boldsymbol{r}}_i^{*}-\dot{\boldsymbol{r}}_i^{**} \tag{1.4.18}$$

因此，虚速度有时定义为：在同一瞬时、同一位形上，质点系的可能速度的有限变更。

比较式（1.4.9）和式（1.4.16）可以看出，在一阶线性的约束情况下，虚位移约束方程和虚速度约束方程除了元素符号的区别以外，是完全一致的。

与虚位移类似，虚速度有如下性质。①质点系的虚速度是非时间参量的变化引起的，可以视为在给定瞬时和位形上，将时间和约束“凝固”后，各质点为约束所允许的运动速度。它是各质点相对于约束的相对速度。②虚速度的几何性质与虚位移的相同：虚速度位于被“凝固”的约束曲面在此质点所在位置的切平面内，如果被“凝固”的约束曲面在质点所在位置处的单位法向矢量用 $\boldsymbol{n}$ 表示，则有

$$\boldsymbol{n}\cdot\Delta\dot{\boldsymbol{r}}=0 \tag{1.4.19}$$

③在定常约束的情况下，质点系的虚速度可视为可能发生、却尚未发生的可能速度，实速度是众多虚速度（也是可能速度）中的一个。④在非定常约束中（不包括 $A_\beta=0$ 的情形），虚速度不能视为可能发生、却尚未发生的可能速度，实速度是众多可能速度（不是虚速度）中的一个。

1.4.6 用广义坐标表示的虚位移和虚速度

1.4.6.1 完整系统的情形

假设某完整系统由 n 个质点组成，内有 d 个完整约束，由 1.2.3 知，完整系统的自由度 f 等于它的广义坐标的数目 k，即

$$f = k = 3n - d$$

如果恰当地选择 k 个广义坐标 q_1，q_2，…，q_k，可以方便地确定该系统的位形，各质点的直角坐标或矢径均可表述为时间和广义坐标的函数，即

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \cdots, q_k, t) \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \cdots, q_k, t) \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \cdots, q_k, t) \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \cdots, q_k, t) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

注意到虚位移就是等时变分，是非时间参量（在这里就是广义坐标）的变化引起的无限小的位移。于是，在给定的瞬时和位形上，将时间“凝固”后，上式分别对广义坐标作一阶等时变分，可获得用广义坐标表述的各质点的虚位移的表达式

$$\left.\begin{aligned} \delta x_i &= \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha \\ \delta y_i &= \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial y_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha \\ \delta z_i &= \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial z_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad (1.4.20)$$

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad (1.4.21)$$

上式等号的两侧同时除以无限小的时间间隔 $\mathrm{d}t$，将式（1.4.15）和式（1.4.17）代入，并将

$$\Delta \dot{q}_\alpha = \frac{\delta q_\alpha}{\mathrm{d}t} \tag{1.4.22}$$

定义为广义坐标虚速率，则可获得用广义坐标表述的各质点的虚速度的表达式

$$\left.\begin{aligned} \Delta \dot{x}_i &= \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \Delta \dot{q}_\alpha \\ \Delta \dot{y}_i &= \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial y_i}{\partial q_\alpha} \Delta \dot{q}_\alpha \\ \Delta \dot{z}_i &= \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial z_i}{\partial q_\alpha} \Delta \dot{q}_\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{1.4.23}$$

或

$$\Delta \dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha} \Delta \dot{q}_\alpha \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{1.4.24}$$

在式（1.4.20）和式（1.4.21）中，广义坐标变分亦即广义坐标虚位移 δq_α 一共有 $k = 3n - d$ 个，该完整系统的自由度 f 也是（$3n - d$）个，这表明，在完整系统中，广义坐标的虚位移、虚速度都是独立的。

1.4.6.2 非完整系统的情形

假设在 n 个质点组成的非完整系统中，有 d 个完整约束，g 个非完整约束，由 1.2.3 知，在非完整系统中，广义坐标有 $k = 3n - d$ 个，它的自由度，也就是独立的坐标变分的数目为 $f = 3n - d - g$ 个。

如同完整系统一样，恰当地选择 k 个广义坐标 q_α（$\alpha = 1, 2, \cdots, k$），可以方便地确定此非完整系统的位形，各质点的直角坐标或矢径均可表述为时间和广义坐标的函数，如式（1.2.2）和式（1.2.3）。用广义坐标表述的各质点的虚位移、虚速度的表达式，如式（1.4.20）、式（1.4.21）、式（1.4.23）和式（1.4.24）。

与完整系统不同的是，在非完整系统中，用广义坐标表述的各质

点的虚位移（式（1.4.20）和式（1.4.21））及虚速度（式（1.4.23）和式（1.4.24）），一共有 k 个广义虚位移 δq_α、k 个广义虚速度 $\Delta\dot{q}_\alpha$ $(\alpha=1,2,\cdots,k)$，但是，它们并非都是独立的，要受到 g 个非完整约束方程

$$\sum_{\alpha=1}^{k} a_{\beta\alpha}\delta q_\alpha = 0 \qquad (\beta = 1,2,\cdots,g)$$

及

$$\sum_{\alpha=1}^{k} a_{\beta\alpha}\Delta\dot{q}_\alpha = 0 \qquad (\beta = 1,2,\cdots,g) \qquad (1.4.25)$$

的制约。因此，在非完整系统中，各质点的虚位移表达式和虚速度表达式中，广义坐标虚位移 δq_α、广义坐标虚速率 $\Delta\dot{q}_\alpha$ 各有 $k=3n-d$ 个，然而，独立的广义坐标虚位移 δq_α 和广义坐标虚速率 $\Delta\dot{q}_\alpha$ 各有 $(k-g)$ 个，这表明，在非完整系统中，独立的广义坐标的虚位移、独立的广义坐标虚速率分别等于非完整系统的自由度，小于该系统的广义坐标的数目。

1.5 理想约束

1.5.1 约束力

在非自由质点系中，各质点不能像自由质点那样自由地运动，只能在约束允许的条件内运动。约束对质点或质点系的限制，在力学中归结为约束力的作用。约束对非自由质点系的各质点施加约束力，与此同时，各质点对约束施加作用力。这里的作用力和约束力构成一组作用和反作用力，遵循作用和反作用定律。

作用于质点或质点系上的力有不同分类的方法，一是按内力和外力分，二是按主动力和约束力分。分析力学中多用后一种分类法，为此，需要介绍一下约束力的某些性质。

1.5.2 理想约束

理想约束是实际约束在一定条件下抽象化的结果。约束力在质点

系的任何虚位移中所做的元功之和等于零，具有这种性质的约束称为**理想约束**。

设某一质点系由 n 个质点组成，如果作用于第 i 个质点上的约束力用 $\boldsymbol{N}_i$ 表示，该质点的虚位移用 $\delta \boldsymbol{r}_i$ 表示，约束力 $\boldsymbol{N}_i$ 在其虚位移 $\delta \boldsymbol{r}_i$ 上所做的元功，也称为虚功，用 δA_{N_i} 表示，理想约束的条件则为

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A_{N_i} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{N}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{1.5.1}$$

式中 δA_{N_i} 中的"δ"只是约束力 $\boldsymbol{N}_i$ 的虚功符号，并非某函数 A 的等时变分符号，就这一点来说，它有别于虚位移 $\delta \boldsymbol{r}_i$ 中的"δ"符号。注意到

$$\boldsymbol{N}_i = N_{ix} \boldsymbol{i} + N_{iy} \boldsymbol{j} + N_{iz} \boldsymbol{k} \tag{1.5.2}$$

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \delta x_i \boldsymbol{i} + \delta y_i \boldsymbol{j} + \delta z_i \boldsymbol{k} \tag{1.5.3}$$

将式（1.5.2）和式（1.5.3）代入式（1.5.1）得

$$\sum_{i=1}^{n} (N_{ix} \delta x_i + N_{iy} \delta y_i + N_{iz} \delta z_i) = 0 \tag{1.5.4}$$

这是理想约束条件的坐标分析表达式。

在式（1.5.1）和式（1.5.4）等号两侧同时除以 $\mathrm{d}t$，并注意到式（1.4.15）和式（1.4.17）的关系，则有

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{N}_i \cdot \Delta \dot{\boldsymbol{r}}_i = 0 \tag{1.5.5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (N_{ix} \Delta \dot{x}_i + N_{iy} \Delta \dot{y}_i + N_{iz} \Delta \dot{z}_i) = 0 \tag{1.5.6}$$

此二式给出了理想约束的另一种定义：约束力在质点系的任何虚速度中的所做的元功率之和等于零，具有这种性质的约束称为理想约束。

1.5.3 几种比较典型的理想约束

1.5.3.1 光滑面

1）光滑固定面

假设一质点沿光滑的固定曲面运动，该曲面的约束方程为

$$f(x,y,z)=0$$

该曲面允许此质点在其质点所处位置的切面内运动，只限制此质点沿其法线方向的运动。这表明在光滑固定面的约束中，质点所受的约束力 $\boldsymbol{N}$ 只可能沿该曲面的法线方向。在 1.4.2.2 中引入了单位法向矢量 $\boldsymbol{n}$ 为

$$\boldsymbol{n}=C\left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$$

光滑固定面对于质点的约束力可以表示为

$$\boldsymbol{N}=N\boldsymbol{n}=NC\left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \tag{1.5.7}$$

式中 N 为约束力 $\boldsymbol{N}$ 在曲面的质点所在位置的法线方向的投影，于是，约束力 $\boldsymbol{N}$ 沿该质点的任意虚位移 $\delta\boldsymbol{r}$ 上的元功

$$\delta A_N=\boldsymbol{N}\cdot\delta\boldsymbol{r}=N(\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{r})$$

注意到式（1.4.12）的关系，即

$$\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{r}=C\left(\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z\right)=0$$

则有

$$\delta A_N=\boldsymbol{N}\cdot\delta\boldsymbol{r}=0 \tag{1.5.8}$$

此式表明：光滑固定面是理想约束。属于光滑固定面范围的理想约束还有光滑铰链支座、辊轴支座、滑道约束以及凡是接触表面的摩擦可以忽略的约束。

2）光滑运动面

某质点在一光滑曲面上运动，此曲面又随时间变化着，这是属于非定常几何约束的情形，约束方程为

$$f(x,y,z,t)=0$$

在 1.4.2 中讨论虚位移的几何性质时论述到，在给定瞬时和位置上质点的虚位移是在此时将时间和约束均“凝固”住之后，为约束所

允许的无限小的位移。此时，此运动的曲面被“凝固”为固定的曲面，约束力 $\boldsymbol{N}$ 沿曲面的法线方向，虚位移 $\delta\boldsymbol{r}$ 沿凝固后的曲面上通过该点的任一切线方向，约束力 $\boldsymbol{N}$ 与虚位移 $\delta\boldsymbol{r}$ 垂直，所以有

$$\delta A_N = \boldsymbol{N}\cdot\delta\boldsymbol{r} = 0$$

这表明光滑的运动曲面也是理想约束。

注意到曲线可视为两个曲面的交线，由此类推，光滑的曲线，无论是固定的曲线，还是运动的曲线，也都是理想约束。

1.5.3.2 刚性连接

质点 A 和 B 用无质量的刚杆连接后，作为一个整体在空间作任意运动，如图 1－5－1（a）所示，这是刚性连接的典型例子，它的约束方程为

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = l^2$$

将此式作等时变分，则

$$(x_A - x_B)(\delta x_A - \delta x_B) + (y_A - y_B)(\delta y_A - \delta y_B) + (z_A - z_B)(\delta z_A - \delta z_B) = 0 \tag{1.5.9}$$

这是质点 A 和 B 的虚位移在直角坐标轴上的投影应满足的约束方程。

假设刚体对质点 A 和 B 的约束力分别为 $\boldsymbol{N}_A$、$\boldsymbol{N}_B$，如图 1－5－1（b）所示，根据作用反作用定律，质点 A 和 B 对刚杆的作用力分别为 $\boldsymbol{N}'_A$、$\boldsymbol{N}'_B$，而且有 $\boldsymbol{N}_A = -\boldsymbol{N}'_A$、$\boldsymbol{N}_B = -\boldsymbol{N}'_B$。刚杆在力 $\boldsymbol{N}'_A$、$\boldsymbol{N}'_B$ 作用下在空间作任意运动，可以建立它的力学方程。

首先，根据刚杆无质量（$m=0$）的假定及质心运动定理，有

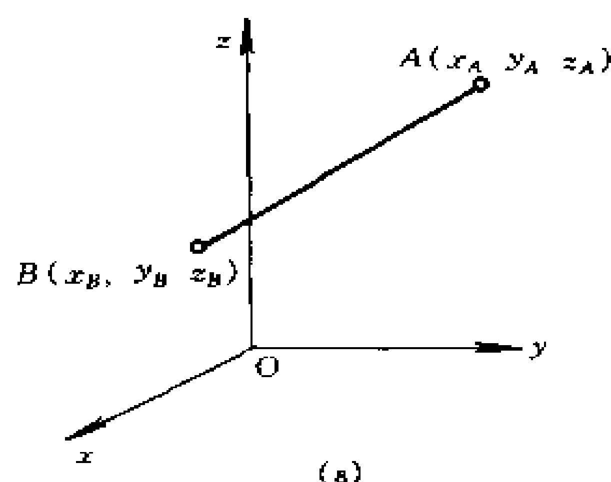
$$m\boldsymbol{a}_C = \sum_{i=1}^{2}\boldsymbol{F}_i, \qquad 0 = \boldsymbol{N}'_A + \boldsymbol{N}'_B$$

所以

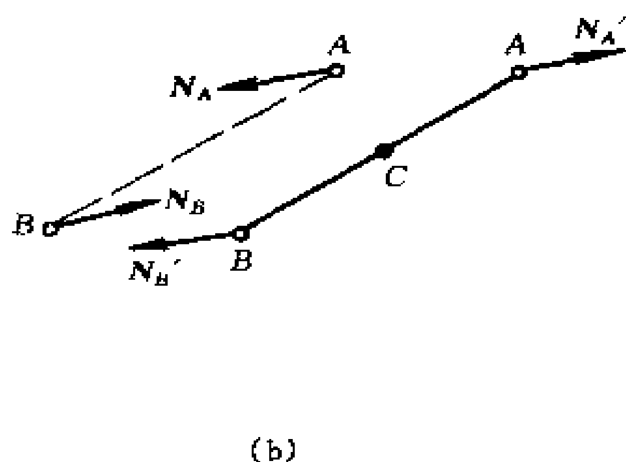
$$\boldsymbol{N}'_A = -\boldsymbol{N}'_B \tag{1.5.10}$$

其次，刚杆的形心为其中点 C，刚杆无质量，它对其质心即形心 C 的转动惯量 $J_C = 0$，根据相对质心的动量矩定理，有

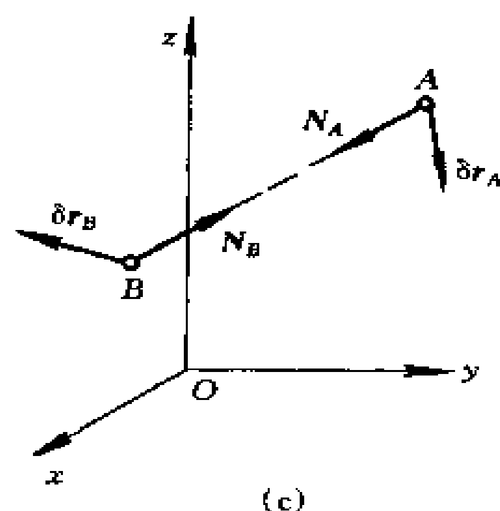
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J_C\,\boldsymbol{\omega}) = \sum \boldsymbol{m}_C(\boldsymbol{F}_i),\qquad 0 = \overrightarrow{CA}\times\boldsymbol{N}'_A + \overrightarrow{CB}\times\boldsymbol{N}'_B$$



(a)



(b)



(c)

图 1－5－1

将式（1.5.10）代入上式，得

$$(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB})\times\boldsymbol{N}'_A = 0 \qquad (1.5.11)$$

其中矢径

$$\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}\neq 0$$

一般地说，$\boldsymbol{N}'_A \neq 0$，所以，为了保证式（1.5.11）成立，约束力 $\boldsymbol{N}'_A$ 必须沿 AB 方向，约束力 $\boldsymbol{N}'_B$ 也必须沿 AB 方向。

由此可知，刚杆 AB 上的力 $\boldsymbol{N}'_A$、$\boldsymbol{N}'_B$ 应满足大小相等、方向相

反、作用线相重合（即沿 AB 杆的方向）三个条件。再根据作用反作用定律，刚杆对质点 A 和 B 的约束力 $\boldsymbol{N}_A$、$\boldsymbol{N}_B$ 也应满足这三个条件，如图 1－5－1（c）所示。既然 $\boldsymbol{N}_A$、$\boldsymbol{N}_B$ 的作用线沿 AB 方向，于是，它们沿直角坐标系中的分析表达式为

$$\boldsymbol{N}_A = -\boldsymbol{N}_B = C(x_A - x_B)\boldsymbol{i} + (y_A - y_B)\boldsymbol{j} + (z_A - z_B)\boldsymbol{k} \quad (1.5.12)$$

式中 C 为比例系数。如果令 $RMS = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$，则

$$C = N_A/(RMS) = N_B/(RMS)$$

设质点 A 和 B 在图（c）所示瞬时及位置上的虚位移分别为 $\delta \boldsymbol{r}_A$、$\delta \boldsymbol{r}_B$，则

$$\left.\begin{aligned} \delta \boldsymbol{r}_A &= \delta x_A \boldsymbol{i} + \delta y_A \boldsymbol{j} + \delta z_A \boldsymbol{k} \\ \delta \boldsymbol{r}_B &= \delta x_B \boldsymbol{i} + \delta y_B \boldsymbol{j} + \delta z_B \boldsymbol{k} \end{aligned}\right\} \quad (1.5.13)$$

在图示位置上，质点 A 和 B 的约束力 $\boldsymbol{N}_A$、$\boldsymbol{N}_B$ 在其虚位移 $\delta \boldsymbol{r}_A$、$\delta \boldsymbol{r}_B$ 中所做元功之和为

$$\sum \delta A_N = \boldsymbol{N}_A \cdot \delta \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{N}_B \cdot \delta \boldsymbol{r}_B$$

将式（1.5.12）和式（1.5.13）代入上式，并注意到式（1.5.9）的关系，得

$$\begin{aligned} \sum \delta A_N = \boldsymbol{N}_A \cdot (\delta \boldsymbol{r}_A - \delta \boldsymbol{r}_B) = C[&(x_A - x_B)(\delta x_A - \delta x_B) \\ &+ (y_A - y_B)(\delta y_A - \delta y_B) + (z_A - z_B)(\delta z_A - \delta z_B)] = 0 \end{aligned}$$

这表明无质量的刚杆连接是理想约束。值得指出，就每一个质点来说，它所受的约束力在其虚位移所做的元功未必等于零，但是，对于整个约束力系来说，它的虚功之和等于零。属于这类的理想约束还有刚体、刚性绳索以及在连接中的弹性变形可以忽略的约束。

1.5.3.3　柔索连接

质点 A 和 B 用无质量、轴向不会伸长（或缩短）、通过固定光滑圆环 O 的柔索连接在一起，作为一个整体，该系统可以在空间任意运动，而且柔索始终保持在张紧的状态。为简单起见，假设它们在

Oxy 平面内运动，如图 1－5－2（a）所示，质点 A 和 B 的约束方程为

$$\sqrt{x_A^2+y_A^2}+\sqrt{x_B^2+y_B^2}=OA+OB=l$$

式中 l 为柔索的长度。该式作一阶等时变分，得

$$\frac{x_A\delta x_A+y_A\delta y_A}{\sqrt{x_A^2+y_A^2}}+\frac{x_B\delta x_B+y_B\delta y_B}{\sqrt{x_B^2+y_B^2}}=0 \qquad (1.5.14)$$

这是质点 A 和 B 的虚位移 $\delta \boldsymbol{r}_A$、$\delta \boldsymbol{r}_B$ 在 Oxy 坐标系的投影应满足的约束方程。

首先，讨论固定光滑圆环 O 对柔索的约束。取圆环的铅直截面如图 1－5－2（b）所示，柔索紧贴光滑圆环截面 C 的上缘，截面 C 上缘对柔索的约束力 $\boldsymbol{N}$ 是分布力，其作用线沿截面的法向，通过圆心 C；柔索与圆截面接触点的虚位移 $\delta \boldsymbol{r}$ 沿各接触点的切线方向，于是

$$\sum \delta A_N=\sum \boldsymbol{N}\cdot\delta \boldsymbol{r}=0$$

这表明：光滑圆环 O 对柔索的约束属于理想约束。

其次，对圆环 O 上的柔索建立对固定点 C 的动量矩方程。注意到柔索的质量不计，$J_C=0$，圆截面的半径用 R 表示，柔索只能承受拉力。质点 A 和 B 对它的作用力 $\boldsymbol{N}'_A$、$\boldsymbol{N}'_B$ 只能沿柔索的轴线方向，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J_C\boldsymbol{\omega})=\sum_{i=1}^{2}\boldsymbol{m}_C(\boldsymbol{F}_i), \qquad 0=N'_AR-N'_BR$$

所以

$$\boldsymbol{N}'_A=\boldsymbol{N}'_B \qquad (1.5.15)$$

再讨论柔索对质点 A 和 B 的约束。根据作用反作用定律，柔索对质点 A 和 B 的约束力 $\boldsymbol{N}_A$、$\boldsymbol{N}_B$ 与 $\boldsymbol{N}'_A$、$\boldsymbol{N}'_B$ 是作用反作用关系，由式（1.5.15）知，$\boldsymbol{N}_A$、$\boldsymbol{N}_B$ 二力的大小应该相等，即

$$\boldsymbol{N}_A=\boldsymbol{N}'_B \qquad (1.5.16)$$

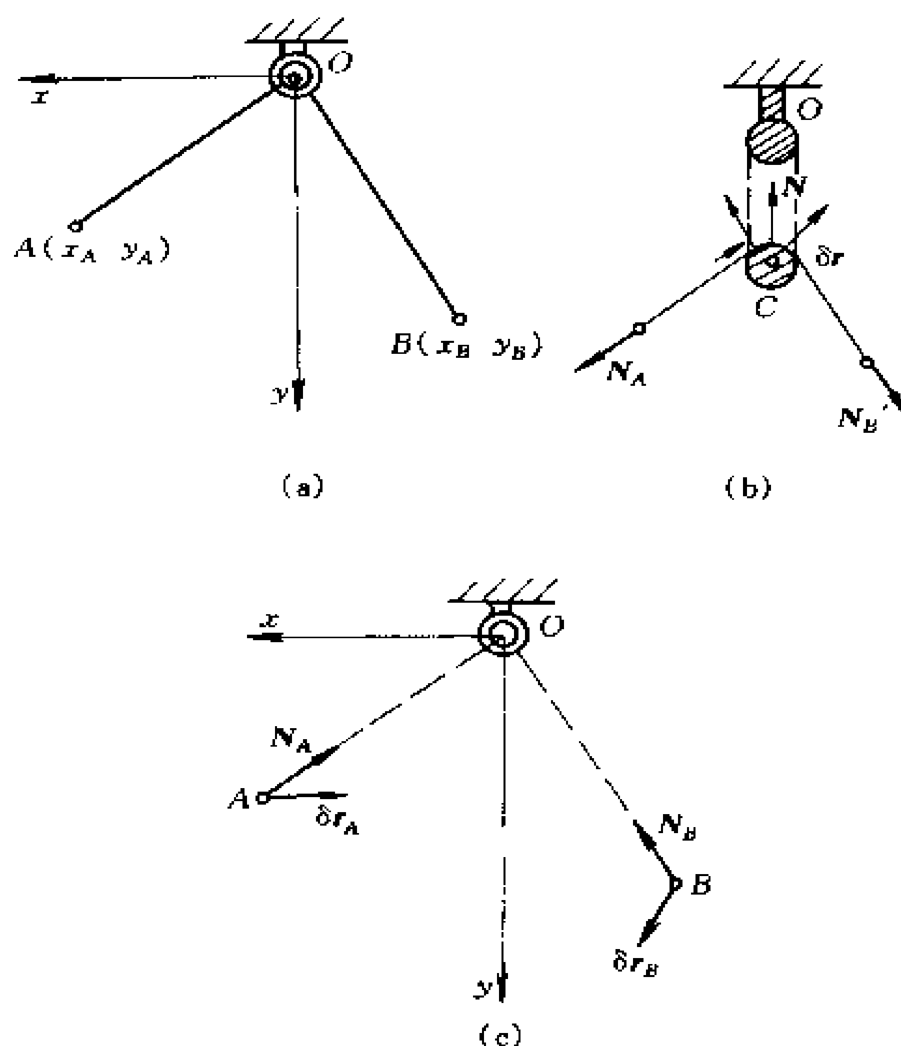


图 1－5－2

作用线也是沿柔索的轴线方向，如图 1－5－2（c）所示。这两个力沿直角坐标系中的分析表达式为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{N}_A &= \frac{x_A}{OA}N_A\,\boldsymbol{i} + \frac{y_A}{OA}N_A\,\boldsymbol{j} = \frac{N_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}}(x_A\,\boldsymbol{i} + y_A\,\boldsymbol{j}) \\ \boldsymbol{N}_B &= \frac{x_B}{OB}N_B\,\boldsymbol{i} + \frac{y_B}{OB}N_B\,\boldsymbol{j} = \frac{N_B}{\sqrt{x_B^2 + y_B^2}}(x_B\,\boldsymbol{i} + y_B\,\boldsymbol{j}) \end{aligned}\right\} \quad (1.5.17)$$

设质点 A 和 B 在图示瞬时和位置上的虚位移分别为 $\delta\boldsymbol{r}_A$、$\delta\boldsymbol{r}_B$，则

$$\left.\begin{aligned} \delta\boldsymbol{r}_A &= \delta x_A\,\boldsymbol{i} + \delta y_A\,\boldsymbol{j} \\ \delta\boldsymbol{r}_B &= \delta x_B\,\boldsymbol{i} + \delta y_B\,\boldsymbol{j} \end{aligned}\right\} \quad (1.5.18)$$

于是，在图（c）所示位置上，质点 A 和 B 的约束力 $\boldsymbol{N}_A$、$\boldsymbol{N}_B$ 在虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_A$、$\delta\boldsymbol{r}_B$ 上的元功之和为

$$\sum\delta A_N = \boldsymbol{N}_A\cdot\delta\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{N}_B\cdot\delta\boldsymbol{r}_B$$

将式（1.5.17）和式（1.5.18）代入上式，并注意到式（1.5.16）和式（1.5.14）的关系，得

$$\sum\delta A_N = N_A\left(\frac{x_A\delta x_A + y_A\delta y_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}} + \frac{x_B\delta x_B + y_B\delta y_B}{\sqrt{x_B^2 + y_B^2}}\right) = 0$$

这表明无质量、轴向不会伸长或缩短、穿过固定光滑圆环的柔索，其两端各自连接一个质点，这种柔索连接，不论是圆环对柔索，还是柔索对质点都是理想约束。和刚性连接类似，柔索对每个质点的约束力在其虚位移上所做的元功未必等于零，但是，对于整个约束力系来说，它的虚功之和是等于零的。同属于此类理想约束的还有紧贴光滑刚体表面的柔索、紧贴滑轮而无相对滑动的柔索等等。

1.5.3.4　滚动接触的刚体

1）刚体在固定轨道上滚动的情形

在平直（或曲线）轨道上纯滚动的圆轮是这类约束最简单而典型的例子，在 1.1.3 中介绍过。这是可积分的定常运动约束，约束方程为

$$\dot{x}_C - r\dot{\varphi} = 0$$

其含义是：圆轮与轨道的接触点 A 的速度恒等于零，即 $v_A \equiv 0$。于是，接触点 A 的实位移

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{v}_A\mathrm{d}t = 0$$

在 1.4.3 中有过这样的结论：在定常约束的情况下，实位移是众多虚位移中的一个，此例是定常的运动约束，接触点 A 的实位移是其虚位移的一个，即有

$$\delta\boldsymbol{r}_A = \mathrm{d}\boldsymbol{r}_A = 0$$

在接触点 A 处，轨道给予圆轮的约束力 $\boldsymbol{R}$ 有两个分量：圆轮法向的正压力 $\boldsymbol{N}_A$ 和切向的摩擦力 $\boldsymbol{F}_A$，如图 1－5－3 所示，则有

$$\boldsymbol{R}_A = \boldsymbol{N}_A + \boldsymbol{F}_A$$

于是，约束力 $\boldsymbol{R}_A$ 在其虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_A$ 中的元功之和为

$$\sum\delta A_N=\boldsymbol{R}_A\cdot\delta\boldsymbol{r}_A=(\boldsymbol{N}_A+\boldsymbol{F}_A)\cdot\delta\boldsymbol{r}_A=0$$

属于理想约束。

2）两运动刚体之间的滚动

图 1－5－4 所示的齿轮传动机构是最简单的一例，主动轮 O_1 驱动从动轮 O_2 运动，这两个齿轮各自限制对方的运动，约束条件是：二轮在啮合点 A 的速度相等，即

$$\boldsymbol{v}_{A1}=\boldsymbol{v}_{A2}=\boldsymbol{v}_A$$

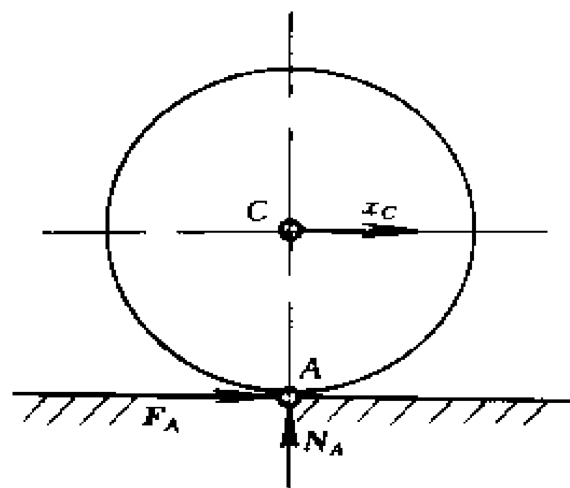


图 1－5－3

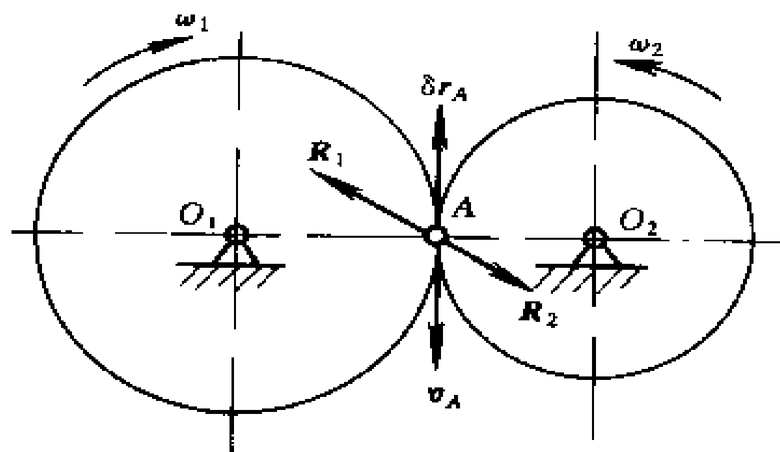


图 1－5－4

这是定常的运动约束。啮合点 A 的实位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A$ 为二轮的公切线，方向向下。在定常约束中，虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_A$ 也是沿公切线方向，它的指向既可向下，也可向上，假设 $\delta\boldsymbol{r}_A$ 向上。

此机构的约束力就是主动轮 O_1 和从动轮 O_2 之间的相互作用力 $\boldsymbol{R}_1$ 和 $\boldsymbol{R}_2$，根据作用反作用定律，有

$$\boldsymbol{R}_1=-\boldsymbol{R}_2 \qquad 或 \qquad \boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{R}_2=0$$

于是在啮合点 A 处两轮的约束力 $\boldsymbol{R}_1$、$\boldsymbol{R}_2$ 在各自虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_{A1}$、$\delta\boldsymbol{r}_{A2}$ 上所做元功之和为

$$\sum\delta A_N=\boldsymbol{R}_1\cdot\delta\boldsymbol{r}_{A1}+\boldsymbol{R}_2\cdot\delta\boldsymbol{r}_{A2}=(\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{R}_2)\cdot\delta\boldsymbol{r}_A=0$$

由此可知，这也是理想约束。

综上所述，在固定轨道（平面轨道或曲面轨道）上滚动的圆轮所

受的约束、齿轮啮合都是理想约束，属于这种类型的理想约束还有两刚体接触表面之间无相对滑动的滚动、各种滚动轴承、车轮以及凡是滚动摩擦可以忽略的滚动约束等等。

通过以上的讨论可以知道，常见的一些约束都是理想约束，这表明理想约束的条件是从实际约束的主要因素中抽象出来的。值得指出，作为理想约束的物理基础，如光滑性、刚性、不可伸长（或缩短）性等等，都是一种理想状态，在现实生活中并不能完全做到。在某些情况下，这种理想化往往是不能允许的，例如，在某问题中，忽略摩擦力将导致系统的理论分析结果不能完整地、甚至不可能表述该系统显示的各种现象的物理特征。对于这种情况，在分析力学中通常采取这样一种处理方法，即只把非光滑约束中起限制作用的法向分量视为约束力，而将起限制作用切向分量——摩擦力视为待求的主动力，于是这种约束还是可以视为理想约束。

对理想约束作了以上说明之后，理想约束这个概念可以普遍地运用到实际的约束之中。

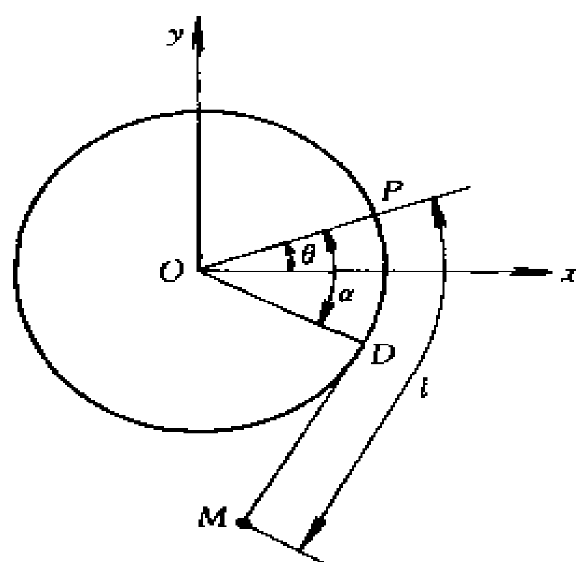
在本书中，如无特别的说明，施加于非自由质点系中的约束都是理想约束。

习　题

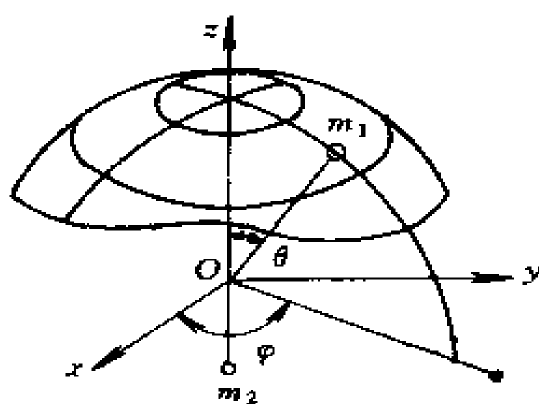
1－1　一个在 Oxy 平面内运动的质点 M，用一根长为 l 的不可伸长的细绳连接在半径为 r 的固定圆盘边缘的 P 点处，如题 1－1 图所示。OP 线与 x 轴成 θ 角，当绳的自由端处于图示位置 $M(x, y)$ 时，试写出此质点所受的约束方程。若以细绳与圆盘贴合的分离点 D 的幅角 α 为广义坐标，试写出两组坐标之间的变换方程。

1－2　质量为 m_1 和 m_2 的两个质点用长为 l 的不可伸长的细线连结，此线穿过半径为 r 的光滑固定球面顶点上的小孔，导致质点 m_1 在球面上运动，质点 m_2 则沿铅垂线运动，如题 1－2 图所示。若取$(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$为此系统的位形坐标，以质点 m_1 所在的子午面的转角 φ 和连线 Om_1 与 z 轴的夹角 θ 为广义坐标，试写出这两

组坐标之间的变换方程。

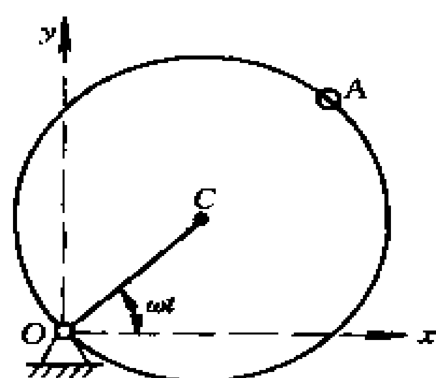


题 1 1 图



题 1－2 图

1－3 质量为 m 的小球 A 在半径为 r 的光滑圆环上运动（题1－3 图），此圆环在水平面上又绕环上的 O 点匀速转动，角速度为 ω。试写出小球的约束方程，求出它的自由度。



题 1－3 图

1－4 题 1－4 图所示人体模型由 10 个刚体组成：头、身、四肢（上臂、下臂、大腿、小腿），设各个部位在垂直平面内运动，两脚停留在地面上，前后脚的距离保持为常数值 L，各部位的长度为 l_i（$i=1, 2, \cdots, 10$）。用水平固定方向的单位矢量 e_1 与第 i 个刚体法线方向 $e_1^{(i)}$ 的夹角 φ_i（$i=1, 2, \cdots, 10$）描述此系统的位形，试写出此系统的约束方程，并求出它的自由度。

1－5 质点 A 和 B 用一根长为 l 的直杆相连后在水平面上运动。已知此杆中点 C 的速度始终沿 AB 方向，试用 A、B 两点的直角坐标及其导数，写出此系统的约束方程，并确定它的自由度。

1－6 三个质量相等的质点 M_1、M_2、M_3 用四根质量不计、长度均为 l 的直杆铰接在同一平面内（题 1－6 图）。取此三点的坐标

(x_1, y_1, z_1)、(x_2, y_2, z_2)、(x_3, y_3, z_3)为此系统的位形坐标，试写出它的约束方程，求出它的自由度，并给出合理的几组独立的广义坐标。

题 1－4 图

题 1－6 图

1－7 一带孔的小球 M 可沿直杆自由滑动。如题 1－7 图所示。已知直杆在 $x_1O_1y_1$ 平面内绕 P 点以匀角速度 ω 转动，同时，P 点相对于 $x_1O_1y_1$ 以初速度 v_0 做匀加速直线运动，加速度为 a_0，试写出小球 M 的约束方程，并求其自由度。

题 1－7 图

1－8 试说明下列运动约束中哪些是可积的。对于可积分的约束，求出对应的有限的约束方程。

(1) $x\dot{z} + (y^2 - x^2 - z)\dot{x} + (z - y^2 - xy)y = 0$

(2) $\dfrac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{\dot{y}_1 + y_2}{y_1 - y_2}$

(3) $\dot{y} - z\dot{x} = 0$

(4) $\dot{x}(x^2 + y^2 + z^2) + 2(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) = 0$

(5) $(2x + y + z)\dot{x} + (2y + z + x)\dot{y} + (2z + x + y)\dot{z} = 0$

第 2 章　虚位移原理和达朗伯原理

2.1　虚位移原理

2.1.1　虚位移原理

虚位移原理是分析静力学的基本原理，可以表述为具有完整、定常、理想约束的质点系，其平衡的充分必要条件是：在给定的位形上，作用于该质点系上的所有主动力在任何虚位移上所做的元功之和等于零。如果作用于第 i 个质点的主动力用 $\boldsymbol{F}_i$ 表示，在给定的位形上，第 i 个质点的虚位移用 $\delta\boldsymbol{r}_i$ 表示，它们的坐标分析表达式分别为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_i &= X_i\boldsymbol{i} + Y_i\boldsymbol{j} + Z_i\boldsymbol{k} \\ \delta\boldsymbol{r}_i &= \delta x_i\boldsymbol{i} + \delta y_i\boldsymbol{j} + \delta z_i\boldsymbol{k}\end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

则虚位移原理的表达式为

$$\sum_{i=1}^{n}\delta A_F = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0 \tag{2.1.1}$$

或

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i) = 0 \tag{2.1.2}$$

主动力在虚位移中所做的元功称为**虚功**，虚位移原理称为**虚功原理**，式（2.1.1）和式（2.1.2）称为**虚功方程**。

作为基本原理的虚位移原理，它是人们在长期实践中的经验总结，其正确性经受了长期实践的反复验证，如同牛顿定律一样，是不需要再去证明的。这是问题的一个方面；从另一方面来说，虚位移原理和牛顿定律并不矛盾，如果承认牛顿定律是力学的基本原理，那么，就可以把虚位移原理视为由牛顿定律推导出来的一个定理（在

2.4 节达朗伯原理中也作这样的认识)。为了说明矢量力学、分析力学两种体系在基本原理上的一致性，下面从牛顿定律出发，论证虚位移原理的必要性和充分性。在论证前，对虚位移原理中的“平衡”概念略加说明。

在刚体静力学中，把等效于零的力系称为平衡力系。在平衡力系作用下的刚体被认为是平衡的。在刚体静力学中，平衡包括了静止和惯性运动两种状态。在分析静力学中，“平衡”的含义是：如果质点系相对于惯性参考系原来是处于静止状态，在主动力系作用下仍然保持静止状态，只有静止一种状态。

2.1.1.1 必要性的证明

由于质点系保持平衡（即静止），根据牛顿定律，作用于第 i 个质点上的主动力 $\boldsymbol{F}_i$ 和约束力 $\boldsymbol{N}_i$ 之和应等于零，即

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{N}_i = 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

将此式的等号两侧同时乘以虚位移 $\delta \boldsymbol{r}_i$，再对 i 求和，得

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{N}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

或

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i + \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{2.1.3}$$

该质点系的约束是理想约束。根据理想约束条件

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

将上式代入式 (2.1.3)，可以得到虚功方程。这表明，如果质点系是平衡的，那么，该质点系中所有主动力所做的虚功之和必然等于零。

2.1.1.2 充分性的证明

采用反证法证明。假设虚功方程式 (2.1.1) 是成立的，但是，在主动力系的作用下，质点系的平衡状态被破坏了，至少有一个质点由静止进入运动。为方便起见，在 n 个质点组成的质点系中，假设有 e 个质点由静止进入运动，其余 $(n-e)$ 个质点继续保持静止状态。

设第 i 个质点$(i=1,2,\cdots,e)$由静止进入运动，作用于其上的主

动力 $\boldsymbol{F}_i$ 与约束力 $\boldsymbol{N}_i$ 不是平衡力系，它们的合力用 $\boldsymbol{R}_i$ 表示，即

$$\boldsymbol{R}_i=\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{N}_i\neq 0 \qquad (i=1,2,\cdots,e)$$

在合力 $\boldsymbol{R}_i$ 的作用下，该质点将沿 $\boldsymbol{R}_i$ 的方向由静止进入运动，实位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$ 与 $\boldsymbol{R}_i$ 同向，合力 $\boldsymbol{R}_i$ 在实位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$ 上所做的元功是正的，即

$$\boldsymbol{R}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{F}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{N}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i>0 \qquad (i=1,2,\cdots,e)$$

注意到该质点系中的约束是定常的理想约束，在 1.4.3 中曾经论述了虚位移、实位移和可能位移之间的关系，在定常约束的情况下，实位移是众多虚位移中的一个，于是上式可以改写为

$$\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{N}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i>0 \qquad (i=1,2,\cdots,e) \tag{2.1.4}$$

其余的（$n-e$）个质点继续保持静止状态，作用于其上的主动力和约束力为平衡力系，有

$$\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{N}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0(i=e+1,e+2,\cdots,n) \tag{2.1.5}$$

将式(2.1.4)和式(2.1.5)对 i 求和，再将理想约束的条件代人，得

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i>0 \tag{2.1.6}$$

所以有

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i>0$$

此式与论证前认为虚功方程（式（2.1.1））是成立的假设矛盾。这表明，如果作用在质点系上所有主动力的虚功之和等于零，满足虚功方程，那么就有充分的理由说，此质点系的每一个质点都是保持平衡的。

2.1.2 用虚速度表示的虚位移原理

在式（2.1.1）和式（2.1.2）等号两侧同时除以 $\mathrm{d}t$，并注意到式（1.4.15）和式（1.4.17）的关系，得

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\Delta\dot{\boldsymbol{r}}_i=0 \tag{2.1.7}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i\Delta\dot{x}_i+Y_i\Delta\dot{y}_i+Z_i\Delta\dot{z}_i)=0 \tag{2.1.8}$$

主动力在虚速度中所做的元功率称为**虚功率**。式（2.1.7）和式

(2.1.8) 给出了用虚速度表示的虚位移原理：具有完整、定常、理想约束的质点系，其平衡的充分必要条件是，在给定的位形上，作用于各质点上的所有主动力在任何虚速度中所做的元功率之和等于零。这种形式的虚位移原理称为**虚功率原理**，式（2.1.7）和式（2.1.8）称为**虚功率方程**。

2.1.3 虚位移原理的应用

虚位移原理可用来分析以下两类平衡问题。

（1）已知质点系处于平衡状态，求平衡条件，包括系统的平衡位置、主动力之间的关系等等。

例 2－1 图 2－1－1（a）中，均质杆 AB 长 l，质量为 m，A 端搁在水平地板上，B 端靠在铅直墙面上，并用一弹簧连接在天花板上。已知弹簧劲度系数为 k，$mg<2kl$，AB 杆直立时，弹簧不受力，为自然状态。弹簧的质量和摩擦均可略去。求平衡时，杆与水平地板的夹角 φ。

解：此均质杆有一个自由度，取杆与水平地板的夹角 φ 为广义坐标。作用于其上的主动力有两个，重力 mg 铅直向下，作用于杆的质心 C 上，弹簧的拉力 $\boldsymbol{F}$ 铅直向上，它的大小与其变形 Δ 成正比。在图示平衡位置上，弹簧伸长量及其拉力分别为

$$\Delta = l(1-\sin\varphi)$$

$$F = k\cdot\Delta = kl(1-\sin\varphi)$$

注意到虚位移是虚设的，它对弹簧的实际伸长量没有任何影响。因此，弹性力的虚功是按常力 $\boldsymbol{F}$ 的元功来计算。

B、C 点的虚位移用解析法计算。

取墙与地板的交点 O 为原点，建立静止坐标系 xOy，B、C 点的相关坐标为

$$y_B = l\sin(180^\circ-\varphi) = l\sin\varphi$$

$$y_C = 0.5l\sin(180^\circ-\varphi) = 0.5l\sin\varphi$$

$$\therefore \quad \delta y_B = l\cos\varphi\delta\varphi$$

$$\delta y_C = 0.5l\cos\varphi\delta\varphi$$

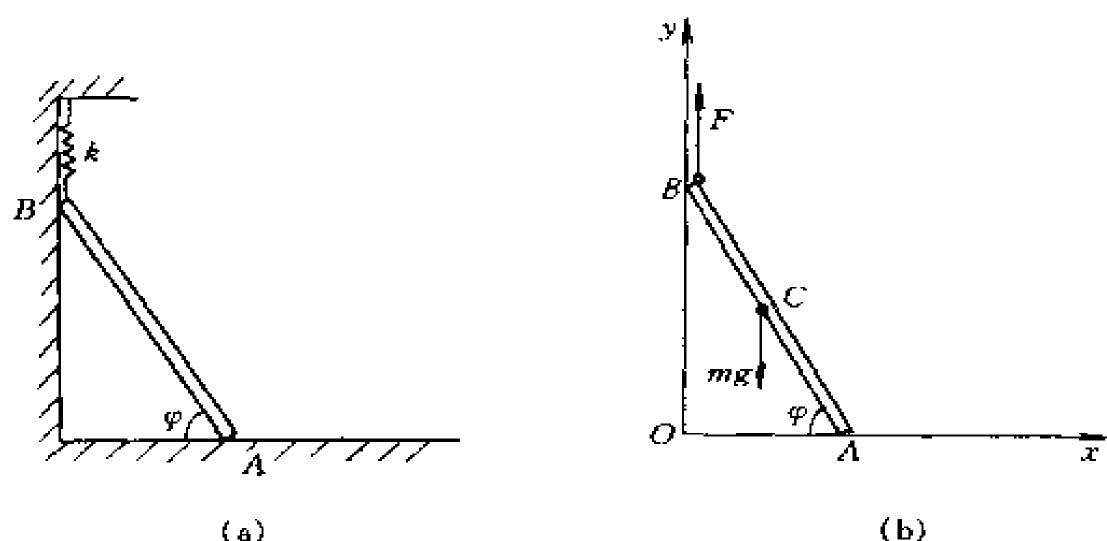


图 2-1-1

将力 $\boldsymbol{F}$、mg 及 δy_B、δy_C 代人虚功方程式（2.1.2），得

$$\sum \delta A_F = \sum_{i=1}^{2} Z_i \delta z_i = F\delta y_B + (-mg)\delta y_C = 0$$

即

$$[kl(1-\sin\varphi) - 0.5mg]\, l\cos\varphi\,\delta\varphi = 0$$

广义坐标 φ 的变分 $\delta\varphi$（虚位移）一般不为零，为保证上式成立，应有

$$\cos\varphi = 0 \tag{a}$$

$$kl(l-\sin\varphi) - 0.5mg = 0 \tag{b}$$

由此解得 AB 杆的平衡位置有两个，分别由式（a）和式（b）解得，即

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_2 = \arcsin\left(1 - \frac{mg}{2kl}\right)$$

至于在这两个位置上的平衡具有何种性质，将在例 2-7 中讨论。

例 2-2 图 2-1-2（a）所示的螺旋千斤顶中，旋转手柄 OA（右旋）即可将重物 B 举起来，已知：手柄 $OA = l = 0.6$ m，方形螺纹螺杆的平均半径 $r = 24$ mm，螺距 $h = 12$ mm，螺杆与支座螺纹之

间的摩擦系数 $f=f'=\tan\varphi_m=0.1$。今在手柄 OA 的水平面内，作用一垂直于手柄的力 $P=160$ N，螺杆及手柄的质量可以忽略不计，试求此千斤顶能举起的重物 B 的重量 W。

解： 这是一个单自由度的简单机械。在推动手柄螺杆转动的力 $\boldsymbol{P}$ 的作用下，此千斤顶能够举起重物 B；当力 $\boldsymbol{P}$ 撤去后，借助于摩擦自锁，它仍然能够在原有位置保持平衡状态，不会下落。因此，在这里需要考虑螺杆与支座螺纹之间的摩擦。如果将这种摩擦力视为主动力，则此机械系统所受的约束仍可视为理想约束，可以用虚位移原理来分析它的平衡问题。

在力 $\boldsymbol{P}$ 作用下，螺杆右旋上升，举起重物 B，螺杆与支座的方形螺纹接触面之间产生相互作用的、沿螺纹分布的法向力和动滑动摩擦力，图 2-1-2（b）示出了螺杆-手柄的受力图。螺杆螺纹所受的是千斤顶支座螺纹对它们作用的法向约束力 $\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_2,\cdots,\boldsymbol{N}_i$ 和摩擦力 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_i$。螺纹被展开后为一斜面。图 2-1-2（c）为被展开螺纹的一个螺距的斜面示意图。法向约束力 $\boldsymbol{N}_i$ 沿斜面的垂线方向，摩擦力 $\boldsymbol{F}_i$ 沿斜面方向，此斜面的倾角 α 的正切

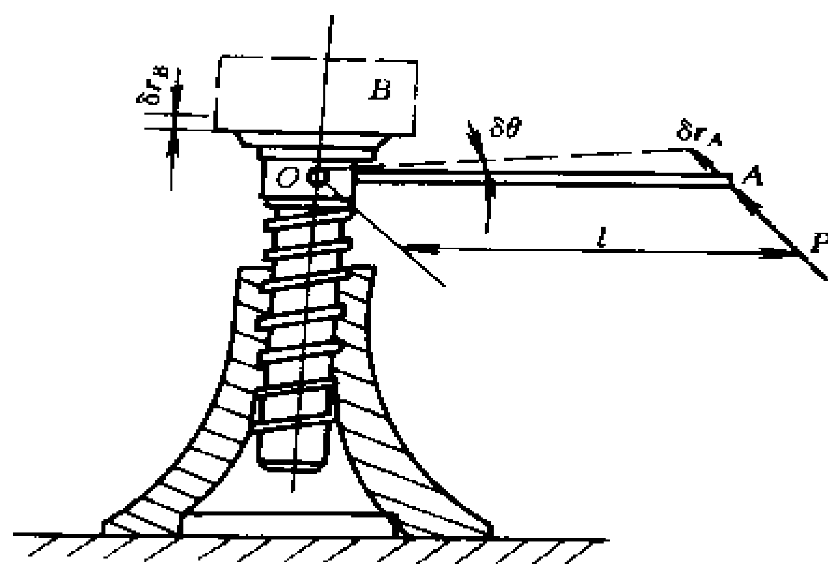
$$\tan\alpha=\frac{h}{2\pi r} \tag{a}$$

将已知数据 $h=12$ mm，$r=24$ mm 代入上式，得 $\tan\alpha=0.079\ 58<0.1=f$，这表明此千斤顶的螺纹满足自锁条件。

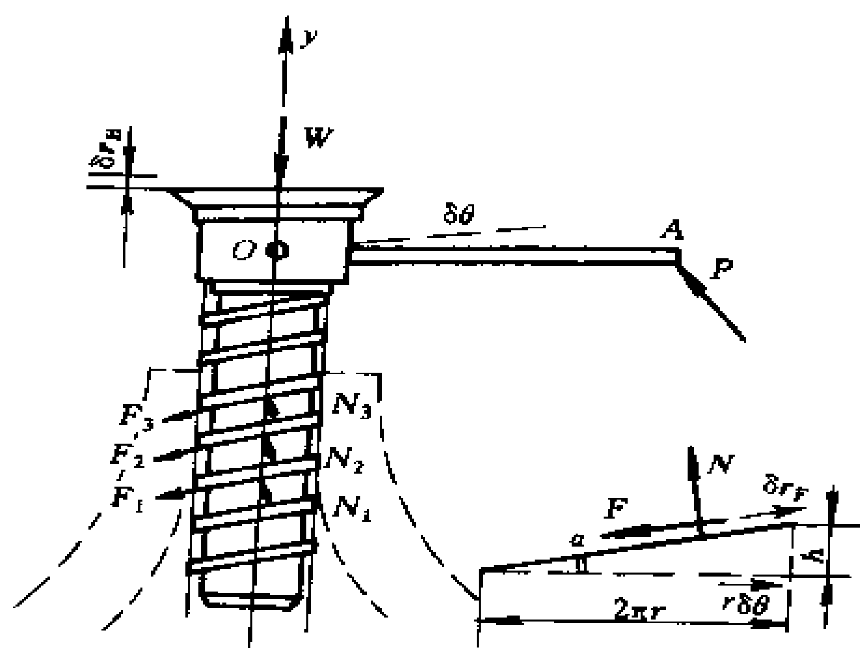
今取手柄 OA 的转角 θ 为广义坐标，并给出一逆时针转向的虚位移 $\delta\theta$。按照右螺旋规则，螺杆将产生一个上升的虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_B$，螺杆的螺纹将沿支座的螺纹斜面向上滑移虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_F$。$\delta\boldsymbol{r}_B$、$\delta\boldsymbol{r}_F$ 与 $\delta\theta$ 的关系可由下述比例关系求解。

①手柄-螺杆一起转动，手柄的虚位移为 $\delta\theta$，螺杆螺纹平均半径端点沿水平截面方向的虚位移为 $r\delta\theta$，螺杆螺纹平均半径沿斜面方向的虚位移为 δr_F，二者应满足投影的关系，即

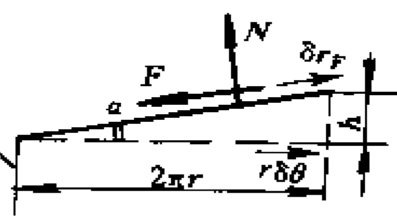
$$\delta r_F=\frac{r\delta\theta}{\cos\alpha} \tag{b}$$



(a)



(b)



(c)

图 2-1-2

②手柄逆时针转动一周（2π 弧度），螺杆上升一个螺距，手柄的虚位移 $\delta\theta$ 与螺杆的虚位移 δr_B 二者应满足比例关系，$\delta r_B:\delta\theta = h:2\pi$，即

$$\delta r_B = \frac{h}{2\pi}\delta\theta \tag{c}$$

此机械系统的虚功方程为

$$\sum\delta A_F = Pl\cdot\delta\theta - W\cdot\delta r_B - \sum F_i\cdot\delta r_F = 0$$

将式（a）、式（b）和式（c）代入上式，得

$$\left(Pl - \frac{h}{2\pi}W - \frac{r}{\cos\alpha}\cdot\sum F\right)\delta\theta = 0$$

注意虚位移 $\delta\theta$ 不恒为零，为保证上式成立，应有

$$Pl - \frac{h}{2\pi}W - \frac{r}{\cos\alpha}\sum F = 0 \tag{d}$$

式中的摩擦力 $\sum F$ 可通过摩擦定律 $\sum F = f\sum N$ 求出，即

$$\sum N = \frac{1}{f}\sum F \tag{e}$$

在图（b）中，将螺杆所受的力投影到铅直轴 y 上，即

$$\sum Y = 0,\qquad \left(\sum N\right)\cos\alpha - W - \left(\sum F\right)\sin\alpha = 0$$

将式（e）代入上式，解得

$$\sum F = \frac{fW}{\cos\alpha - f\sin\alpha} \tag{f}$$

将式（f）代入式（d），解得

$$W = \frac{2\pi l\cos^2\alpha(1 - f\tan\alpha)}{h\cos^2\alpha(1 - f\tan\alpha) + 2\pi rf}P \tag{g}$$

将已知数据 $l = 600$ mm，$h = 12$ mm，$r = 24$ mm，$f = 0.1$，$\tan\alpha = 0.079\ 58$，$\cos\alpha = (1 + \tan^2\alpha)^{-1/2} = 0.996\ 8$，$P = 160$ N 代入式（g），得

$$W = 138.1P \approx 22.1\times10^3\ \text{N}$$

此千斤顶能够举起的重物 B 的重量是力 P 的 138.1 倍，即 $W = 22.1$ kN。

例 2－3 试用虚位移原理推导自由刚体的平衡条件。

解：（1）自由刚体的自由度

一个自由质点要用它的三个直角坐标来确定它在空间的位置，这三个坐标都是独立的，因此它有三个自由度。用一无质量的刚杆连结 A 和 B 两质点，此系统有 6 个直角坐标（$3\times2=6$）、1 个约束，由式（1.2.19）知，它有 5 个自由度（$f=3\times2-1=5$）。用三根无质量的刚杆连接 A、B、C 三个质点组成的三角形 ABC 系统，有 3 个约束，由式（1.2.19）知，它的自由度 $f=3\times3-3=6$。在此三角形的基础上，每增加一个质点（三个直角坐标），需要增加 3 根刚杆约束才能保证所构成的形体是不变的。所增加的坐标数目与约束的数目相等。因此，这种形体仍然是 6 个自由度。自由刚体属于这种形体，所以自由刚体有 6 个自由度。

（2）自由刚体的平衡条件

在自由刚体中，选取任意一点 O' 为极点，建立平移参考系 $O'x'y'z'$，如图 2－1－3 所示。M_i 为此刚体上的任一点。

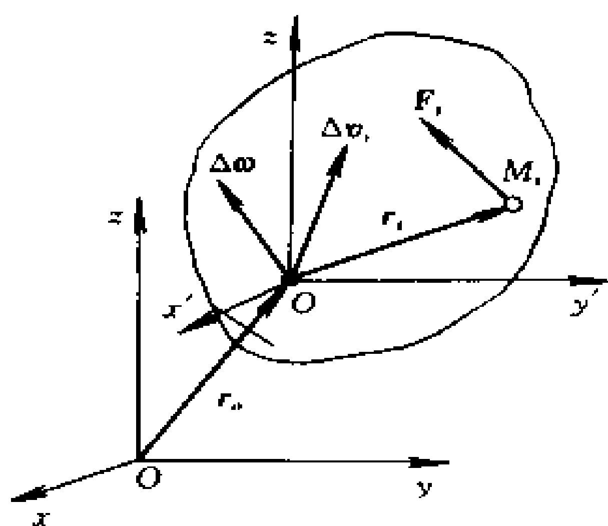


图 2－1－3

$$r_O = x_O\boldsymbol{i} + y_O\boldsymbol{j} + z_O\boldsymbol{k} \qquad (a)$$

$$\boldsymbol{r}_i' = x_i'\boldsymbol{i} + y_i'\boldsymbol{j} + z_i'\boldsymbol{k} \qquad (b)$$

选择极点 O' 的三坐标 x_O、y_O、z_O 和刚体绕 $O'x'y'z'$ 坐标轴转动的转角 φ_x、φ_y、φ_z 为六个广义坐标，那么，在图示瞬时和位置上，此刚体的虚速度

$$\Delta\dot{\boldsymbol{r}}_O = \Delta\boldsymbol{v}_O = \Delta\dot{x}_O\boldsymbol{i} + \Delta\dot{y}_O\boldsymbol{j} + \Delta\dot{z}_O\boldsymbol{k} \qquad (c)$$

$$\Delta\boldsymbol{\omega} = \Delta\dot{\varphi}_O = \Delta\dot{\varphi}_x\boldsymbol{i} + \Delta\dot{\varphi}_y\boldsymbol{j} + \Delta\dot{\varphi}_z\boldsymbol{k} \qquad (d)$$

刚体上任意点 M_i 的虚速度

$$\Delta\dot{\boldsymbol{r}}_i = \Delta\boldsymbol{v}_i = \Delta\boldsymbol{v}_O + \Delta\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_i \qquad (e)$$

设在图示瞬时及位置上，作用于第 i 个质点 M_i 上的主动力

$$\boldsymbol{F}_i = X_i \boldsymbol{i} + Y_i \boldsymbol{j} + Z_i \boldsymbol{k} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{f}$$

将式（e）和式（f）代入式（2.1.7），此刚体虚功率方程为

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot (\Delta \boldsymbol{v}_O + \Delta \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_i) = 0 \tag{g}$$

由矢量代数知，矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的混合积有如下交换规律

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$

于是，式（g）可以改写为

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i\right) \cdot \Delta \boldsymbol{v}_O + \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{F}_i\right) \cdot \Delta \boldsymbol{\omega} = 0 \tag{h}$$

式中 $\boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{F}_i$ 为力 $\boldsymbol{F}_i$ 对极点 O' 的力矩矢量，即

$$\boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_i) = m_x(\boldsymbol{F}_i)\boldsymbol{i} + m_y(\boldsymbol{F}_i)\boldsymbol{j} + m_z(\boldsymbol{F}_i)\boldsymbol{k} \tag{i}$$

将式（c）、式（d）、式（f）和式（i）代入式（h），得

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \Delta \dot{x}_O + \sum_{i=1}^{n} Y_i \Delta \dot{y}_O + \sum_{i=1}^{n} Z_i \Delta \dot{z}_O$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} m_x(\boldsymbol{F}_i) \Delta \dot{\varphi}_x + \sum_{i=1}^{n} m_y(\boldsymbol{F}_i) \Delta \dot{\varphi}_y + \sum_{i=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_i) \Delta \dot{\varphi}_z = 0 \tag{j}$$

注意到在自由刚体中，广义坐标虚速度 $\Delta \dot{x}_O$、$\Delta \dot{y}_O$、$\Delta \dot{z}_O$、$\Delta \dot{\varphi}_x$、$\Delta \dot{\varphi}_y$、$\Delta \dot{\varphi}_z$ 都是独立的，为了保证式（j）成立，它们前面的系数均应等于零，即

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} m_x(\boldsymbol{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_y(\boldsymbol{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_i) = 0$$

这就是静力学中自由刚体的 6 个平衡条件。

（2）已知质点系处于平衡状态，求其内力或约束力。

在此情况下，需要解除对应的约束，用相应的内力或约束力代替，使质点系仍处于平衡状态，而待求的内力或约束力“转化”为主动力。

例 2－4 图 2－1－4（a）中 $ABCD$ 是一静定连续梁，作用于其上的载荷 $M = 5.0$ kN·m，$P_1 = P_2 = 4.0$ kN，$q = 2.0$ kN/m，$\alpha = 30°$，$l = 2.0$ m，求支座 A 的约束力。

解： 这是求约束力的问题，具体做法如下。

（1）解除固定端 A 的约束，用相应的约束力 $\boldsymbol{X}_A$、$\boldsymbol{Y}_A$、M_A 代替，此时，该系统有三个自由度，即 AB 梁的水平平移、铅直平移和绕 A 点的转动。选取 x_A、y_A、φ 为广义坐标。

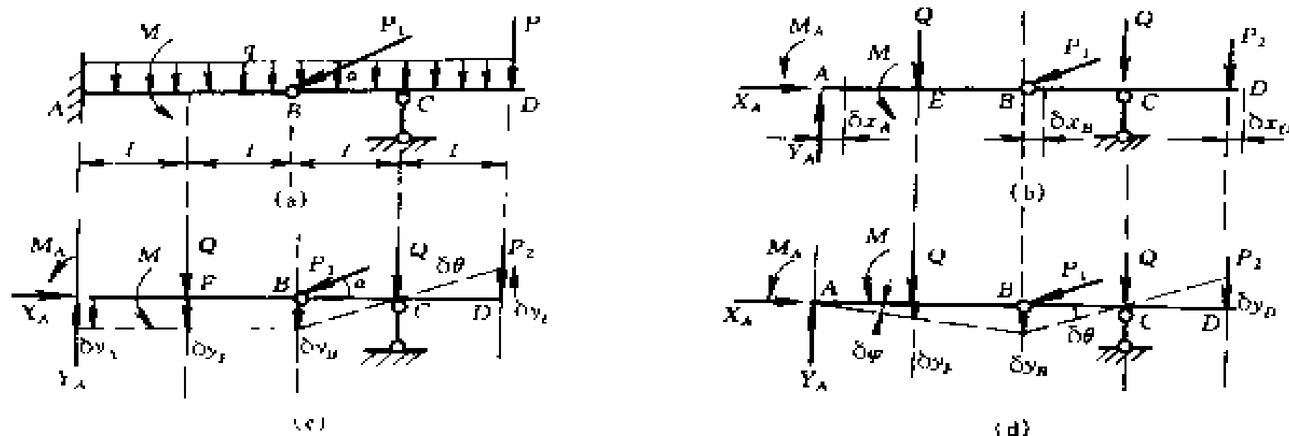


图 2-1-4

（2）为方便起见，将同一根梁上的均匀分布的载荷简化为集中力，即 AB 梁上的简化为 $Q=2ql$，作用在 AB 的中点 E 上，BD 梁上的为 $Q=2ql$，作用在 C 点上。

（3）先给出广义坐标虚位移 δx_A，而 $\delta y_A=\delta\varphi=0$，如图 2－1－4（b）所示，此时，该系统向右平移 δx_A，有

$$\delta x_B=\delta x_A \tag{a}$$

虚功方程为

$$X_A\delta x_A-P_1\cos\alpha\cdot\delta x_B=0 \tag{b}$$

将式（a）代入式（b），得

$$(X_A-P_1\cos\alpha)\delta x_A=0$$

$$\therefore\quad X_A=P_1\cos\alpha=3.46\ \text{kN}\quad(\rightarrow)$$

（4）再给出广义坐标虚位移 δy_A，而 $\delta x_A=\delta\varphi=0$，如图 2－1－4（c）所示，此时，$AB$ 梁向下平移 δy_A，BCD 梁则绕支座 C 逆时针转一虚位移 $\delta\theta$，由图看出

$$\delta y_A=\delta y_E=\delta y_B=\delta y_D,\qquad \delta y_C=0 \tag{c}$$

虚功方程为

$$-Y_A\delta y_A+Q\delta y_E+P_1\sin\alpha\cdot\delta y_B+Q\delta y_C-P_2\delta y_D=0$$

将式（c）代入上式，得

$$(-Y_A + Q + P_1\sin\alpha - P_2)\delta y_A = 0$$

$$\therefore \quad Y_A = Q + P_1\sin\alpha - P_2 = 6.0\ \text{kN} \quad (\uparrow)$$

(5) 然后给出广义坐标虚位移 $\delta\varphi$，而 $\delta x_A = \delta y_A = 0$，如图 2－1－4（d）所示。此时，$AB$ 梁绕 A 顺时针转一虚位移 $\delta\varphi$，梁 BD 绕 C 逆时针转一虚位移 $\delta\theta$，由图看出

$$\left.\begin{array}{ll} \delta y_E = l\delta\varphi, & \delta y_B = \delta y_D = 2l\delta\varphi \\ \delta\theta = 2\delta\varphi, & \delta y_C = 0 \end{array}\right\} \tag{d}$$

虚功方程为

$$(M_A + M)(-\delta\varphi) - Q(\ \ \delta y_E) - P_1\sin\alpha(-\delta y_B) - P_2\delta y_D = 0$$

即

$$-(M_A + M + Ql - 2P_1 l\sin\alpha + 2P_2 l)\delta\varphi = 0 \tag{e}$$

$$\therefore \quad M_A = -M + 2P_1 l\sin\alpha + 2ql^2 - 2P_2 l = 3.0\ \text{kN·m} \quad (\text{逆时针})$$

顺便指出，在转动刚体中，采用该刚体的主动力对转动中心的主矩与转动虚位移的乘积来计算虚功（转动中心的虚位移等于零，主矢不做虚功），要比逐个计算主动力的虚功的方法简便一些。例如，本例题的第 5 步，可以采用如下解法。

AB 梁的主动力（力 $\boldsymbol{P}_1$ 计入 BD 梁中）对转动中心 A 的主矩

$$m_A(\boldsymbol{F}) = M_A + M - Ql = M_A + M - 2ql^2 \quad (\text{逆时针}) \tag{f}$$

BD 梁的主动力对转动中心 C 的主矩

$$m_C = (\boldsymbol{F}) = P_1 l\sin\alpha - P_2 l \quad (\text{逆时针}) \tag{g}$$

AB 梁的转动虚位移为 $\delta\varphi$（顺时针）；BD 梁的为 $\delta\theta$（逆时针），且 $\delta\theta = 2\delta\varphi$，因此，该系统的虚功方程为

$$m_A(\boldsymbol{F})\cdot(-\delta\varphi) + m_C(\boldsymbol{F})\cdot\delta\theta = 0 \tag{h}$$

将式（f）和式（g）代入式（h），得

$$-(M_A + M - Ql - 2P_1 l\sin\alpha + 2P_2 l)\delta\varphi = 0$$

此结果与式（e）是一样的。

与此类同，在平面运动刚体中，采用此刚体的主动力对其瞬时转动中心的主矩与转动虚位移的乘积来计算虚功（转动中心无虚位移，主矢不做虚功），有时显得简便些。当然，也可以用这个主矩与转动

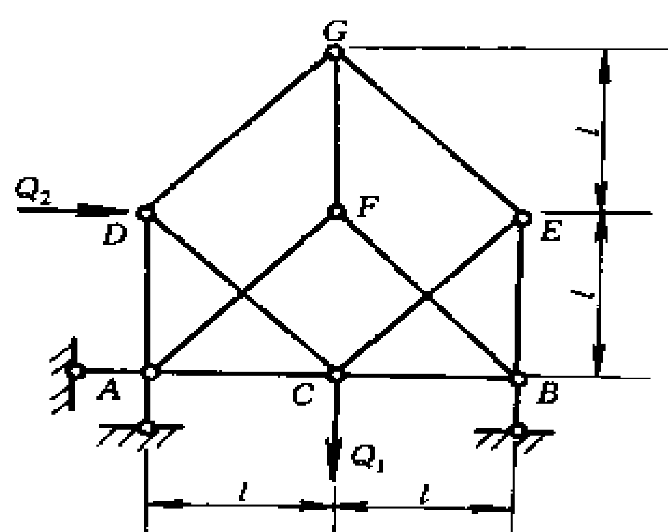
虚速度的乘积来计算虚功率。

例 2－5 求图 2－1－5（a）所示桁架 FG 杆的内力，已知 $Q_1=Q_2=Q$。

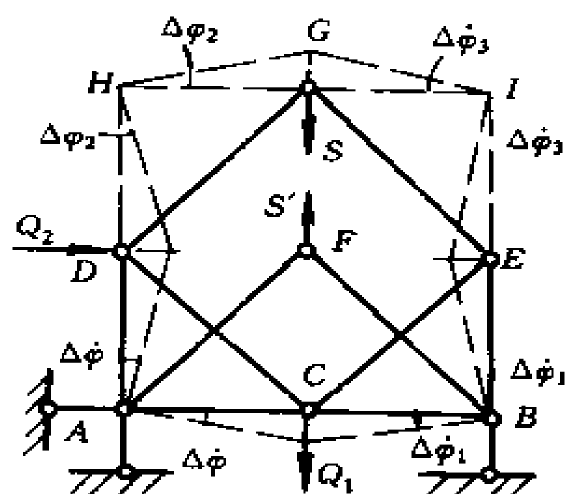
解： 这是求内力的问题，具体做法如下。

（1）解除 FG 杆的约束，用内力 S、S'代替，假设它是拉力，此桁架仍保持平衡，如图 2－1－5（b）所示。

（2）这是一个自由度的系统，△ACD、杆 AF 可绕 A 轴转动，并带动△BEC、杆 BF、杆 DG、杆 EG 在图示平面内作平面运动。取△ACD 的转角 φ 为广义坐标。



(a)



(b)

图 2－1－5

（3）在图示瞬时及位置上，给出△ACD 一虚速度 $\Delta\dot{\varphi}$，顺时针转向，如图 2－1－5（b）所示，点 C 的虚速度向下，点 B 的虚速度沿水平方向。分别作 B、C 点虚速度的垂线，其交点 B 就是在图示位置△BCE 的瞬时速度中心。设△BCE 的虚速度为 $\Delta\dot{\varphi}_1$，逆时针转向，由图看出，C 点的虚速度

$$\Delta v_C = l\Delta\dot{\varphi} = l\Delta\dot{\varphi}_1$$

$$\therefore \quad \Delta\dot{\varphi}_1 = \Delta\dot{\varphi}$$

在图示位置，既然 A、B 两点都是不动的，那么，通过杆 AF、BF 确定的 F 点也是不动的，即

$$\Delta v_F = 0 \qquad \text{(a)}$$

通过 C、F、G 三点的轴线是此系统的对称轴。由上述看出，$\triangle ACD$、$\triangle BCE$ 的虚速度是对称的，从而可以看出杆 DG、杆 EG 的虚速度也是对称的，即在图示位置，点 H、点 I 分别是杆 DG、杆 EG 的瞬心，而且有

$$\Delta v_D = l\Delta\dot{\varphi} = l\Delta\dot{\varphi}_2$$

$$\therefore \quad \Delta\varphi_2 = \Delta\dot{\varphi} \tag{b}$$

（4）计算虚功率。

$\triangle ACD$ 上的主动力 $\boldsymbol{Q}_1$、$\boldsymbol{Q}_2$ 对转动中心 A 的力矩和虚功率分别为

$$m_A(\boldsymbol{F}) = -(Q_1 + Q_2)l \qquad (\text{顺时针})$$

$$\Delta P_A = m_A(\boldsymbol{F})\cdot(-\delta\varphi) = (Q_1 + Q_2)l\Delta\dot{\varphi} \tag{c}$$

杆 DG 上的主动力 $\boldsymbol{S}$ 对瞬心 H 的力矩和虚功率分别为

$$m_H(\boldsymbol{F}) = -Sl \qquad (\text{顺时针})$$

$$\Delta P_H = m_H(\boldsymbol{F})\cdot\Delta\dot{\varphi}_2 = -Sl\Delta\varphi \tag{d}$$

杆 AF 不动，则

$$\Delta P_F = S'\cdot\Delta v_F = 0 \tag{e}$$

（5）将式（c）、式（d）和式（e）代入虚功率方程式（2.1.7），得

$$[(Q_1 + Q_2)l - Sl]\Delta\varphi = 0$$

$$\therefore \quad S = Q_1 + Q_2 = 2Q \qquad (\text{受拉})$$

2.2 用广义力表示的虚位移原理

2.2.1 广义力

在虚功方程式（2.1.1）中，式中的虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_i$ 若用广义坐标的虚位移 δq_α 表示，可以得到更加简明的形式。

将式（1.4.21）代入虚功方程（2.1.1），即

$$\sum_{i=1}^{n}\delta A_F = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\left(\sum_{\alpha=1}^{k}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\right) = \sum_{\alpha=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha$$

则有

$$\sum_{i=1}^{n}\delta A_F = \sum_{\alpha=1}^{k}Q_\alpha\delta q_\alpha \tag{2.2.1}$$

其中

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha} \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,k) \qquad (2.2.2)$$

称为对应于广义坐标 q_α 的**广义力**。注意到 $Q_\alpha \delta q_\alpha$ 的量纲是功，即[力][长度]，于是，广义坐标 q_α 的量纲将决定着广义力 Q_α 的量纲。例如，如果 q_α 的量纲为 [长度]，则 Q_α 的量纲为 [力]；q_α 为“弧度”时，Q_α 则为 [力矩]，量纲为 [力] [长度]。

2.2.2 用广义力表示的虚位移原理

将式（2.2.1）代入式（2.1.1），则有

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\alpha=1}^{k} Q_\alpha \delta q_\alpha = 0 \\ \text{或}\quad &Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \cdots + Q_k\delta q_k = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.3)$$

如果所讨论的质点系是完整系统，由 1.2.3 知，此系统的广义坐标的变分（虚位移）δq_α 都是独立的。为了保证式（2.2.3）成立，应该有下述关系，即

$$Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_k = 0 \qquad (2.2.4)$$

这表明，具有完整、定常的理想约束的质点系，其平衡的充分必要条件是：对应于各广义坐标的广义力都等于零。这是用广义力表示的虚位移原理。

2.2.3 广义力的计算方法

广义力的计算方法有两种。

(1) 根据广义力的定义式（2.2.2）来计算。

它的坐标分析表达式为

$$Q_k = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_\alpha} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_\alpha}\right) \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,k)$$

$$(2.2.5)$$

(2) 取一组特定的广义坐标变分来计算。

在完整系统中，各广义坐标变分（虚位移）都是独立的，可以选

取一组特定的广义坐标变分来计算广义力。例如，如果要计算对应于广义坐标 q_1 的广义力 Q_1，可以给这样一组广义坐标的变分，$\delta q_1 \neq 0$，$\delta q_2 = \delta q_3 = \cdots = \delta q_k = 0$，代入式（2.2.1），则作用于此质点系上所有主动力在对应于 δq_1 的虚位移中所做的元功之和

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \delta A_F\right)_1 = Q_1 \delta q_1$$

所以

$$Q_1 = \frac{1}{\delta q_1}\left(\sum_{i=1}^{n} \delta A_F\right)_1$$

依次类推，各广义力的计算式分别为

$$Q_\alpha = \frac{1}{\delta q_\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} \delta A_F\right)_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2\cdots, k) \tag{2.2.6}$$

下面通过例题加以说明。

例 2-6 在图 2-2-1 所示的双摆中，已知均质杆 OA 和 AB 的长度、重量分别为 l_1、l_2、W_1、W_2，并在 B 端作用一水平向右的力 $\boldsymbol{P}$，试计算双摆的广义力和平衡位置。

解法一：按广义力的定义求解。选取 φ_1、φ_2 为广义坐标，作用于双摆上的主动力有三个，分别是

$$\boldsymbol{F}_1 = W_1 \boldsymbol{i}，\ \boldsymbol{F}_2 = W_2 \boldsymbol{i}，\ \boldsymbol{F}_3 = P\boldsymbol{j} \tag{a}$$

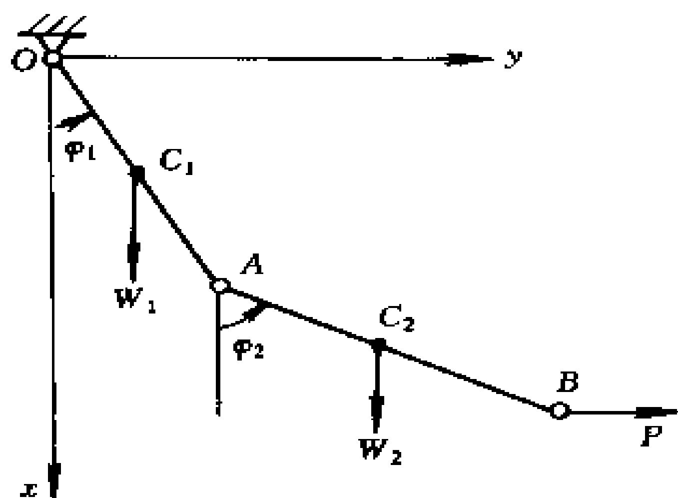


图 2-2-1

这三个力的作用点 C_1、C_2、B 的矢径分别是

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_{C1}=0.5l_1\cos\varphi_1\boldsymbol{i}+0.5l_1\sin\varphi_1\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_{C2}=(l_1\cos\varphi_1+0.5l_2\cos\varphi_2)\boldsymbol{i}+(l_1\sin\varphi_1+0.5l_2\sin\varphi_2)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{r}_B=(l_1\cos\varphi_1+l_2\cos\varphi_2)\boldsymbol{i}+(l_1\sin\varphi_1+l_2\sin\varphi_2)\boldsymbol{j}$$

这三个矢径分别对广义坐标 φ_1、φ_2 做偏导数：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial\varphi_1}=-0.5l_1\sin\varphi_1\boldsymbol{i}+0.5l_1\cos\varphi_1\boldsymbol{j},\quad \frac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial\varphi_2}=0\\
&\frac{\partial \boldsymbol{r}_2}{\partial\varphi_1}=-l_1\sin\varphi_1\boldsymbol{i}+l_1\cos\varphi_1\boldsymbol{j},\quad \frac{\partial \boldsymbol{r}_2}{\partial\varphi_2}=-0.5l_2\sin\varphi_2\boldsymbol{i}+0.5l_2\cos\varphi_2\boldsymbol{j}\\
&\frac{\partial \boldsymbol{r}_3}{\partial\varphi_1}=-l_1\sin\varphi_1\boldsymbol{i}+l_1\cos\varphi_1\boldsymbol{j},\quad \frac{\partial \boldsymbol{r}_3}{\partial\varphi_2}=-l_2\sin\varphi_2\boldsymbol{i}+l_2\cos\varphi_2\boldsymbol{j}
\end{aligned}\right\}\text{(b)}$$

将式（a）和式（b）分别代人式（2.2.2），可以计算出与广义坐标 φ_1、φ_2 对应的广义力

$$\begin{aligned}
Q_1&=\boldsymbol{F}_1\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial\varphi_1}+\boldsymbol{F}_2\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_2}{\partial\varphi_1}+\boldsymbol{F}_3\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_3}{\partial\varphi_1}\\
&=W_1\boldsymbol{i}\cdot(-0.5l_1\sin\varphi_1\boldsymbol{i}+0.5l_1\cos\varphi_1\boldsymbol{j})+W_2\boldsymbol{i}\cdot(-l_1\sin\varphi_1\boldsymbol{i}\\
&\quad+l_1\cos\varphi_1\boldsymbol{j})+P\boldsymbol{j}\cdot(-l_1\sin\varphi_1\boldsymbol{i}+l_1\cos\varphi_1\boldsymbol{j})
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad Q_1=(P\cos\varphi_1-(0.5W_1+W_2)\sin\varphi_1)l_1 \tag{c}$$

$$\begin{aligned}
Q_2&=W_1\boldsymbol{i}\cdot 0+W_2\boldsymbol{i}\cdot(-0.5l_2\sin\varphi_2\boldsymbol{i}+0.5l_2\cos\varphi_2\boldsymbol{j})+P\boldsymbol{j}\cdot\\
&\quad(-l_2\sin\varphi_2\boldsymbol{i}+l_2\cos\varphi_2\boldsymbol{j})
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad Q_2=(P\cos\varphi_2-0.5W_2\sin\varphi_2)l_2 \tag{d}$$

再将式（c）和式（d）代人式（2.2.4），即分别令 Q_1、Q_2 等于零，可求出双摆的平衡位置为

$$\varphi_1=\arctan\left(\frac{2P}{W+2W_2}\right) \tag{e}$$

$$\varphi_2=\arctan\left(\frac{2P}{W_2}\right) \tag{f}$$

解法二：按特定的广义坐标组合求解。

（1）先给出一组特定的广义坐标变分（虚位移）$\delta\varphi_1\neq0$，$\delta\varphi_2=0$，如图 2－2－2（a）所示，此时 OA 绕 O 轴逆时针转一虚位移 $\delta\varphi_1$，AB 则平移一虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_A$，且 $\delta\boldsymbol{r}_2=\delta\boldsymbol{r}_B=\delta\boldsymbol{r}_A$，有

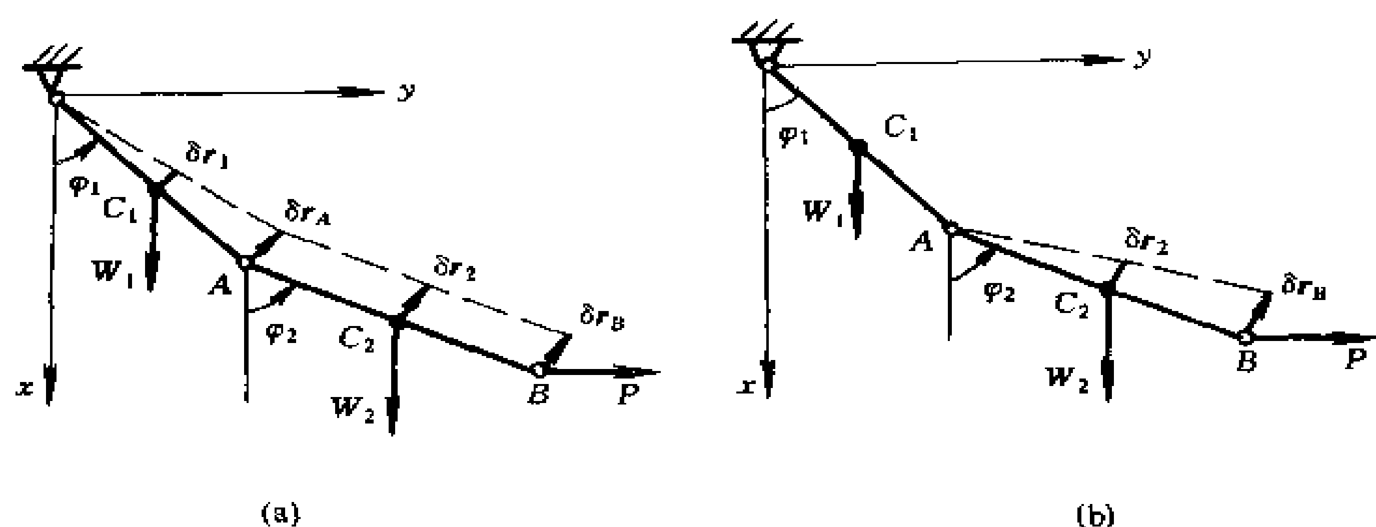


图 2-2-2

$$|\delta \boldsymbol{r}_1| = 0.5 l_1 \delta\varphi_1, \quad |\delta \boldsymbol{r}_2| = |\delta \boldsymbol{r}_B| = |\delta \boldsymbol{r}_A| = l_1 \delta\varphi_1$$

主动力在这组虚位移上所做的虚功之和

$$\begin{aligned}(\sum_{i=1}^{3}\delta A_F)_1 &= \boldsymbol{W}_1 \cdot \delta \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{W}_2 \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{P} \cdot \delta \boldsymbol{r}_B \\ &= -W_1(0.5 l_1 \delta\varphi_1)\sin\varphi_1 - W_2(l_1\delta\varphi_1)\sin\varphi_1 \\ &\quad + P(l_1\delta\varphi_1)\cos\varphi_1\end{aligned}$$

即 $$(\sum_{i=1}^{3}\delta A_F)_1 = [P\cos\varphi_1 - (0.5W_1 + W_2)\sin\varphi_1] l_1 \delta\varphi_1 \quad (g)$$

将式 (g) 代入式 (2.2.6)，得

$$Q_1 = (P\cos\varphi_1 - (0.5W_1 + W_2)\sin\varphi_1) l_1 \quad (h)$$

(2) 再给出一组特定的广义坐标虚位移 $\delta\varphi_1 = 0$，$\delta\varphi_2 \neq 0$，如图 2-2-2 (b) 所示，此时 OA 不动，AB 绕 A 轴逆时针转一虚位移 $\delta\varphi_2$，有

$$|\delta \boldsymbol{r}_1| = 0, \quad |\delta \boldsymbol{r}_2| = 0.5 l_2 \delta\varphi_2, \quad |\delta \boldsymbol{r}_B| = l_2 \delta\varphi_2$$

主动力在这组虚位移上所做的虚功之和

$$(\sum_{i=1}^{3}\delta A_F)_2 = W_1 \cdot 0 - W_2(0.5 l_2 \delta\varphi_2)\sin\varphi_2 + P(l_2\delta\varphi_2)\cos\varphi_2$$

即 $$(\sum_{i=1}^{3}\delta A_F)_2 = (P\cos\varphi_2 - 0.5W_2\sin\varphi_2) l_2 \quad (i)$$

将式 (i) 代入式 (2.2.6)，得

$$Q_2 = (P\cos\varphi_2 - 0.5W_2\sin\varphi_2)\ l_2 \tag{j}$$

将式（h）、式（j）与式（c）、式（d）比较一下可知，两种方式计算的广义力是一样的。平衡位置与式（e）和式（f）相同，不再赘述。

2.3 质点系在有势力作用下的平衡问题

2.3.1 平衡条件

某质点系由 n 个质点组成，内有 d 个完整、定常的理想约束，处于势力场中。作用在各质点上的主动力 $\boldsymbol{F}_i$ 都是有势力，因此，该质点系是保守系统，它的势能函数 V 可以表示为各质点坐标的函数，即

$$V = V(x_1, y_1, z_1, \cdots, x_i, y_i, z_i, \cdots, x_n, y_n, z_n) \tag{2.3.1}$$

这些主动力 $\boldsymbol{F}_i$ 可以用势能函数对坐标的偏导数表示，即

$$\boldsymbol{F}_i = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\boldsymbol{i} + \frac{\partial V}{\partial y_i}\boldsymbol{j} + \frac{\partial V}{\partial z_i}\boldsymbol{k}\right) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.3.2}$$

将式（2.3.2）代入式（2.1.2），虚功方程可以改写为

$$-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0$$

所以有

$$\delta V = 0 \tag{2.3.3}$$

这表明，在势力场中，具有完整、定常的理想约束的质点系，其平衡的充分必要条件是：该质点系势能的一阶等时变分等于零。

此保守系统是完整系统，它的广义坐标的数目与其自由度相等，即

$$f = k = 3n - d$$

适当地选择 k 个广义坐标 q_1，q_2，…，q_k，用直角坐标表示的势能函数（式（2.3.1））可改写为用广义坐标表示的势能函数

$$V = V(q_1, q_2, \cdots, q_k) \tag{2.3.4}$$

为便于区别，质点系在势力场中的广义力称为**广义有势力**。将式（2.3.2）代入式（2.2.2），得

$$Q_\alpha = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial V}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_\alpha}\right)$$

则

$$Q_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1,2,\cdots,k) \tag{2.3.5}$$

即广义有势力等于势能函数对相应的广义坐标的一阶偏导数再冠以负号。将此式代入用广义力表示的虚位移原理式（2.2.4），得

$$\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, k) \tag{2.3.6}$$

这是一个方程组，方程的数目等于该系统广义坐标的数目。它表明，在势力场中，具有完整、定常、理想约束的质点系，其平衡的充分必要条件是：该质点系的势能对每一个广义坐标的一阶偏导数等于零。也可以说，该质点系在平衡位置处势能取极值，这是平衡的能量判据。

2.3.2 平衡稳定性的概念

在保守系统中，从式（2.3.6）中解出该方程对应的几何位置就是该系统的平衡位置。值得注意的是，在各平衡位置上，质点系所处的平衡状态未必相同。例如，在图 2－3－1（a）中，圆柱体在凹形圆柱面内滚动，凹面的最低点是此圆柱体的平衡位置。当它受到微小的扰动而偏离平衡位置后，在重力的作用下，它能返回到原平衡位置，这种平衡状态称为**稳定平衡**。在图 2－3－1（b）中，圆柱在凸形圆柱面上滚动，凸面的顶点是圆柱的平衡位置，受到微小扰动后，圆柱将沿凸面滚下去，再也不能回到原平衡位置，这种平衡状态称为**不稳定平衡**。在图 2－3－1（c）中，圆柱在水平面上滚动，不论在哪个位置，圆柱总是平衡的，这种状态称为**随遇平衡**。

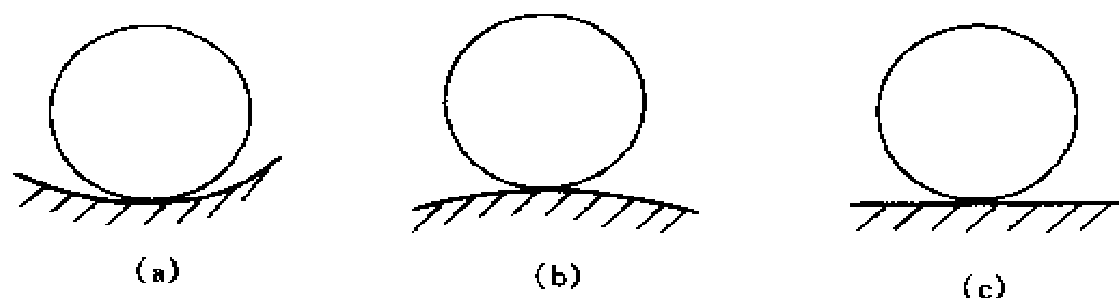


图 2－3－1

下面简单介绍单自由度系统和两个自由度系统的情形，而且只考虑由于广义坐标位置的偏离而引起的扰动，没有考虑速度引起的扰动，是用纯静力学观点来判别平衡的稳定性质。

2.3.2.1　单自由度系统平衡稳定性质的判别方法

如果某单自由度质点系在广义坐标 $q=q_0$ 位置（或位形）是平衡的，那么，它的势能函数在 $q=q_0$ 处取极值，即

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q}\right|_{q=q_0}=0 \tag{2.3.7}$$

若

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}q^2}\right|_{q=q_0}>0 \tag{2.3.8}$$

即势能函数在 $q=q_0$ 处有极小值，那么，该系统在此位置处于稳定的平衡状态。若 $\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}q^2}\right|_{q=q_0}<0$，即势能函数在 $q=q_0$ 处有极大值，那么，它就处于不稳定的平衡状态。若 $\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}q^2}\right|_{q=q_0}=0$，则需要分析更高的偶数阶导数的正负，才能判别在此位置平衡的稳定性质。具体地说，若势能在 $q=q_0$ 处不等于零的最低阶导数的阶次是偶数，此导数值又是正的，即势能有极小值，则该系统在此位置处于稳定的平衡状态；此导数值是负的时，则处于不稳定的平衡状态。若势能函数对广义坐标的各阶导数都等于零，则该系统处于随遇平衡状态。

2.3.2.2　两个自由度系统平衡稳定性质的判别方法

如果某两个自由度质点系在广义坐标 $q_1=q_{10}$、$q_2=q_{20}$处是平衡的，那么，它的势能函数在此处取驻定值，即

$$\left.\frac{\partial V}{\partial q_1}\right|_{(q_{10},q_{20})}=0,\quad \left.\frac{\partial V}{\partial q_2}\right|_{(q_{10},q_{20})}=0 \tag{2.3.9}$$

值得注意的是

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right|_{(q_{10},q_{20})}>0,\quad \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\right|_{(q_{10},q_{20})}>0 \tag{2.3.10}$$

只是保证势能 $V_{(q_{10},q_{20})}$ 为极小值的必要条件，这就是说，即使势能在平衡位形 q_{10}、q_{20} 处的二阶偏导数都大于零，也不能保证 $V_{(q_{10},q_{20})}$ 为极小值。保证 $V_{(q_{10},q_{20})}$ 为极小值的充分条件是

$$\left.\begin{array}{l}\left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right|_{(q_{10},q_{20})} > 0,\quad \left(\text{或}\left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\right|_{(q_{10},q_{20})} > 0\right) \\ \left.\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\right)\right|_{(q_{10},q_{20})} - \left(\left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2}\right|_{(q_{10},q_{20})}\right)^2 > 0\end{array}\right\} \tag{2.3.11}$$

质点系在平衡位形处的势能是极小值，该系统在此位形是处于稳定的平衡状态；反之，若势能不是极小值，则处于不稳定的平衡状态。

例 2－7 试讨论例 2－1 中 AB 杆平衡的稳定性。

解： 取水平地板为零势能面，φ 为广义坐标，此系统的势能表达式为

$$V = mg \times \frac{1}{2} l\sin\varphi + \frac{1}{2}k[(l - l\sin\varphi)^2 - l^2]$$

$$\therefore \quad V = kl^2(\gamma - 1 + 0.5\sin\varphi)\sin\varphi \tag{a}$$

其中

$$\gamma = mg/(2kl) < 1 \tag{b}$$

式 (a) 对 φ 求一阶导数，化简后得

$$\frac{dV}{d\varphi} = kl^2(\gamma - 1 + \sin\varphi)\cos\varphi \tag{c}$$

将式 (c) 代入式 (2.3.7)，可以得到该系统的势能函数 V 对广义坐标 φ 的一阶导数等于零的两个条件，即

① $\cos\varphi = 0$，得 $\quad \varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}$

$$\varphi_2 = -\frac{\pi}{2} \text{（无实际意义）}$$

② $\gamma - 1 + \sin\varphi = 0$，即 $\quad \sin\varphi = 1 - \gamma$

由此看出，只有在 $\gamma \leqslant 1$ 时，$\sin\varphi$ 才有定义，这正好是题目给出的条件（式 (b)），

$$\therefore \quad \varphi_3 = \arcsin(1 - \gamma)$$

式（c）再对 φ 求一次导数，得

$$\frac{d^2V}{d\varphi^2}=kl^2[1+(1-\gamma)\sin\varphi-2\sin^2\varphi] \tag{d}$$

将平衡位置的 φ_1、φ_2、φ_3 代入式（d），并注意到式（b）的关系，列表计算如下。

φ	$\sin\varphi$	$\frac{d^2V}{d\varphi^2}$	$\gamma<1$ 代入后的 $\frac{d^2V}{d\varphi^2}$	平衡的性质
$\frac{\pi}{2}$	1	$-0.5mgl$	$-0.5mgl<0$	不稳定的
$-\frac{\pi}{2}$	-1	$kl^2(\gamma-2)$	$<-kl^2<0$	不稳定的
$\arcsin(1-\gamma)$	$1-\gamma$	$kl^2[1-(1-\gamma)^2]$	$>kl^2>0$	稳定的

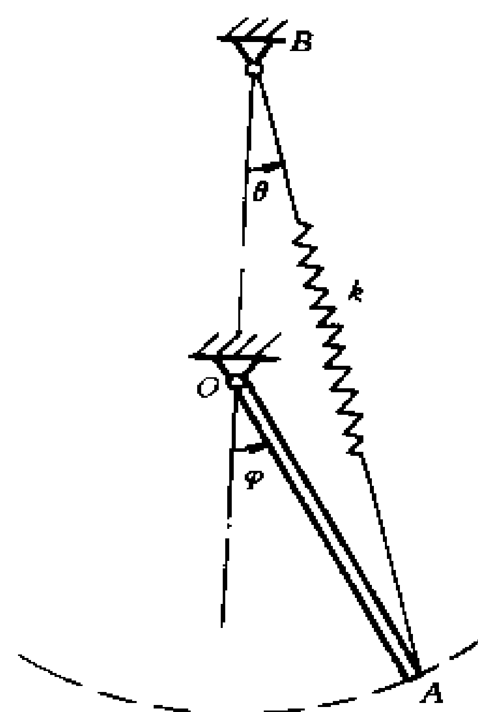


图 2-3-2

例 2-8 弹簧摆杆系统 OAB 位于图 2-3-2 所示的铅直面内，可绕水平轴 O 摆动，已知均质杆 OA 的质量为 m，长度 $OA=OB=l$，弹簧 AB 的自然长度 $l_0=\sqrt{2}l$，弹簧的劲度系数为 k，试求此系统的平衡位置，并讨论它的稳定性。

解：这是单自由度的保守系统。选取 OA 杆与铅直线的夹角 φ 为广义坐标，由图 2-3-2 看出，$\theta=0.5\varphi$。

（1）系统的平衡位置

选择通过 O 轴的水平面为重力的零势能面，以 B 为中心，$l_0=\sqrt{2}l$ 为半径的球面为弹性力的零势能面，此系统的势能函数

$$V=\frac{1}{2}kl^2(2\cos\frac{\varphi}{2}-\sqrt{2})^2-\frac{1}{2}mgl\cos\varphi$$

令
$$\gamma = \frac{mg}{kl} \tag{a}$$
则
$$V = \frac{1}{2}kl^2[(2\cos\frac{\varphi}{2} - \sqrt{2})^2 - \gamma\cos\varphi] \tag{b}$$
式（b）对广义坐标 φ 求一阶导数，整理后，得
$$\frac{dV}{d\varphi} = kl^2\sin\frac{\varphi}{2}[\sqrt{2} - (2-\gamma)\cos\frac{\varphi}{2}] \tag{c}$$
由式（2.3.6）知，此系统平衡的充分必要条件是
$$\frac{dV}{d\varphi} = 0, \quad kl^2\sin\frac{\varphi}{2}[\sqrt{2} - (2-\gamma)\cos\frac{\varphi}{2}] = 0$$
即
$$\sin\frac{\varphi}{2} = 0 \tag{d}$$
$$\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2-\gamma} \tag{e}$$
由式（d）和式（e）看出，当 $2-\sqrt{2} < \gamma < 2+\sqrt{2}$ 时，$\cos\frac{\varphi}{2}$ 无定义，此系统有一个平衡位置，即
$$\varphi_1 = 0 \tag{f}$$
当 $\gamma \leqslant 2-\sqrt{2}$ 或 $\gamma \geqslant 2+\sqrt{2}$ 时，$\cos\frac{\varphi}{2}$ 有定义，此系统有三个平衡位置，即
$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1 = 0 \\ &\varphi_2 = -\varphi_3 = 2\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2-\gamma}\right) \end{aligned}\right\} \tag{g}$$
（2）平衡的稳定性质

由式（2.3.8）知，为判别该系统在平衡位置 φ_1、φ_2、φ_3 的平衡是不是稳定的，需计算势能函数式（b）对广义坐标 φ 的二阶导数在 φ_1、φ_2、φ_3 处值的正负性质，有时还要计算四阶导数的正负性质。将式（c）再求一次、三次导数，化简后得
$$\frac{d^2V}{d\varphi^2} = \frac{1}{2}kl^2[\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2} - (2-\gamma)(2\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1)]$$

$$\frac{d^4 V}{d\varphi^4}=\frac{1}{8}kl^2\left[4(2-\gamma)\left(2\cos^2\frac{\varphi}{2}-1\right)-\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right]$$

将式（f）和式（g）代入上两式，得

$\varphi=\varphi_1=0$ 时，

$$\frac{d^2 V}{d\varphi^2}=\frac{1}{2}kl^2(\sqrt{2}-2+\gamma)$$

$$\frac{d^4 V}{d\varphi^4}=\frac{1}{8}kl^2\left[4(2-\gamma)-\sqrt{2}\right]$$

$\varphi=\varphi_2=-\varphi_3=2\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2-\gamma}\right)$时，

$$\frac{d^2 V}{d\varphi^2}=\frac{1}{2}kl^2\left(2-\gamma-\frac{2}{2-\gamma}\right)$$

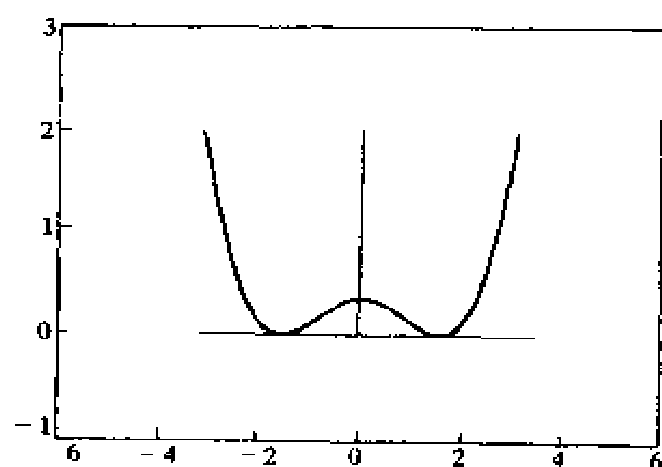
$$\frac{d^4 V}{d\varphi^4}=\frac{1}{4}kl^2\left[\frac{7}{2-\gamma}-2(2-\gamma)\right]$$

对于不同的 γ 值，获得对应的导数值，现列表计算如下。

γ	平衡位置 $\varphi_1=0$			平衡位置 $\varphi_2=-\varphi_3=2\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2-\gamma}\right)$			势能函数的图形
	$\frac{d^2V}{d\varphi^2}$	$\frac{d^4V}{d\varphi^4}$	平衡的性质	$\frac{d^2V}{d\varphi^2}$	$\frac{d^4V}{d\varphi^4}$	平衡的性质	
$<2-\sqrt{2}$	<0		不稳定的	>0		稳定的	见图 2－3－3（a）
$=2-\sqrt{2}$	$=0$	>0	稳定的	$=0$	>0	稳定的	见图 2－3－3（b）
$>2-\sqrt{2}$	>0		稳定的	无定义			见图 2－3－3（c）
$<2+\sqrt{2}$	>0		稳定的	无定义			见图 2－3－3（d）
$=2+\sqrt{2}$	>0		稳定的	$=0$	<0	不稳定的	见图 2－3－3（e）
$>2+\sqrt{2}$	>0		稳定的	<0		不稳定的	见图 2－3－3（f）

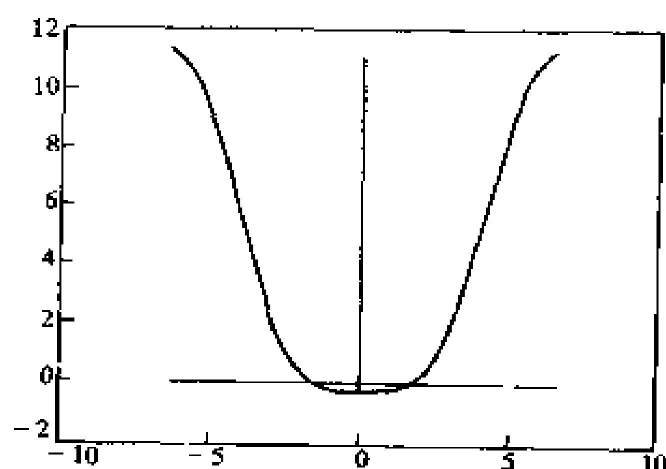
由上表及图 2－3－3（a）～（f）看出，当比值 $\gamma=mg/(kl)$ 由 $\gamma\leqslant 2-\sqrt{2}$ 变化到 $2-\sqrt{2}<\gamma<2+\sqrt{2}$，然后再变化到 $\gamma\geqslant 2+\sqrt{2}$ 时，

该系统平衡位置的数目由三个变到一个，再由一个变到三个，平衡的性质也发生相应的变化。$\gamma=2-\sqrt{2}$和 $\gamma=2+\sqrt{2}$则是发生这种突然变化的特定值。一般地说，系统的某个参数（如本例中的 γ）为某个或某几个特定值时（如本例的 $2-\sqrt{2}$、$2+\sqrt{2}$），系统的动力学特性将发生突然的变化，这种现象在力学中称为**分叉现象**。在工程和生活实际中，分叉现象时有发生。



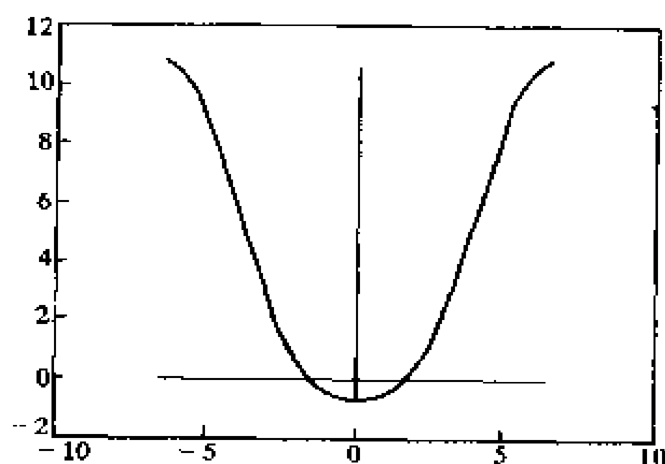
$\gamma=0.005<2-\sqrt{2}$

(a)



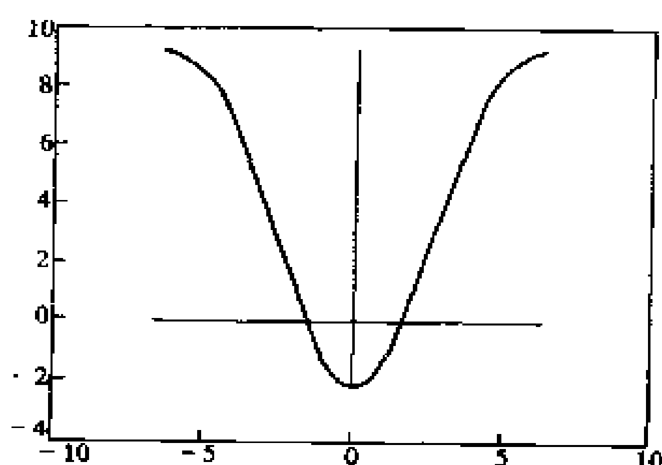
$\gamma=0.5857864=2-\sqrt{2}$

(b)



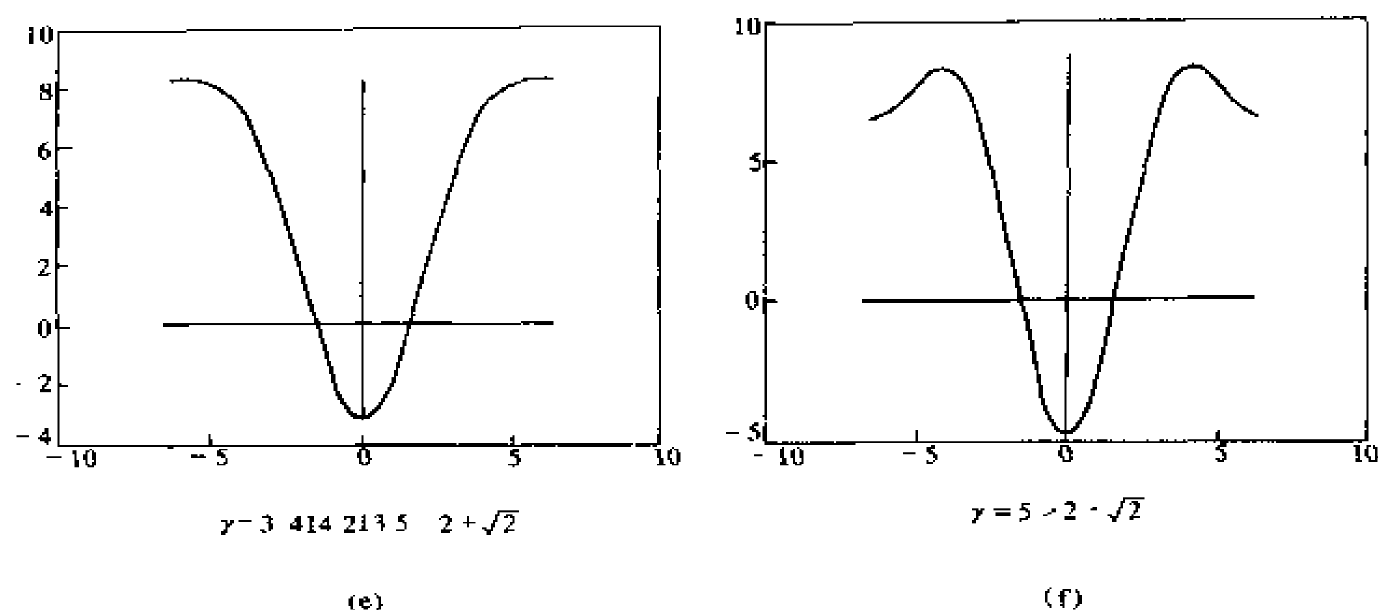
$\gamma=1>2-\sqrt{2}$

(c)



$\gamma=2.5<2+\sqrt{2}$

(d)



(e) (f)

图 2-3-3

2.4 达朗伯原理

达朗伯原理是非自由质点系动力学的一个普遍原理。

2.4.1 质点的达朗伯原理

非自由质点 M 在主动力 $\boldsymbol{F}$ 作用下，沿某固定曲面运动，此曲面给它的约束力为 $\boldsymbol{N}$，如图 2-4-1 所示。按照达朗伯原来的设想，将主动力 $\boldsymbol{F}$ 分解为两部分，即

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_q+\boldsymbol{F}_s \tag{2.4.1}$$

其中力 $\boldsymbol{F}_q$ 称为**驱动力**，用来驱使质点 M 运动，使它产生加速度 $\boldsymbol{a}$，并符合牛顿第二定律的关系

$$\boldsymbol{F}_q=m\boldsymbol{a} \tag{2.4.2}$$

式中 m 为此质点的质量。力 $\boldsymbol{F}_s$ 称为**损失力**，它与约束力 $\boldsymbol{N}$ 相互平衡，即

$$\boldsymbol{F}_s=\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}_q=\boldsymbol{F}-m\boldsymbol{a} \tag{2.4.3}$$

$$\boldsymbol{F}_s+\boldsymbol{N}=\boldsymbol{0} \tag{2.4.4}$$

这是**达朗伯原理**的早期形式，可以表述为质点在运动的每一瞬时，作用于其上的损失力与它对应的约束力平衡。如果将式（2.4.3）代入

式（2.4.4），则有

$$\boldsymbol{F}-m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{N}=0 \tag{2.4.5}$$

由于（$-m\boldsymbol{a}$）具有力的量纲，后来人们把这个量称为“**惯性力**”。惯性力的大小等于运动质点的加速度与其质量的乘积，它的方向则与加速度的方向相反，即

$$\boldsymbol{F}_g=-m\boldsymbol{a} \tag{2.4.6}$$

将式（2.4.6）代入式（2.4.5），则有

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{N}+\boldsymbol{F}_g=0 \tag{2.4.7}$$

这是达朗伯原理的现代形式，可以表述为质点在运动的每一瞬时，作用于其上的主动力、约束力和虚加于此质点上的惯性力在形式上组成一平衡力系。

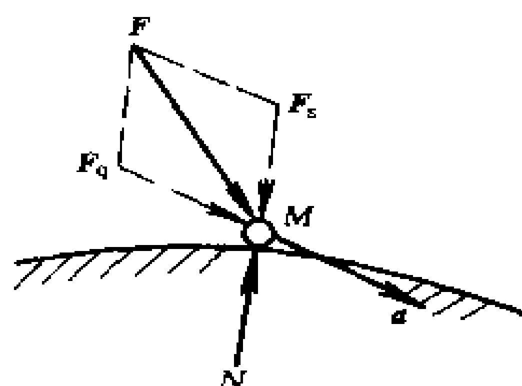


图 2-4-1

它表明，在运动的质点上引进惯性力后，动力学问题可以像静力学平衡问题一样来处理。这种处理方法在工程技术界称为“动静法”，并获得了广泛的应用。

值得指出，①与非惯性参考系相联系的牵连惯性力、科氏惯性力不同，这里引入的惯性力与非惯性参考系的选择无关。当这两种惯性力有可能发生混淆的时候，将这里所引入的惯性力（$-m\boldsymbol{a}$）称为**达朗伯惯性力**。一般情况下，则简称**惯性力**。②这里引入的惯性力是真实存在的，它具有反作用力的性质。质点的惯性力并非作用在此质点上，而是作用在驱使此质点产生加速度的诸施力体上。

2.4.2 质点系的达朗伯原理

假设某质点系由 n 个质量分别为 m_i 的质点组成。在任意瞬时，它的第 i 个质点所承受的力有外力和内力，外力包括系统外的物体或约束对它施加的主动力 $\boldsymbol{F}_i$ 和约束力 $\boldsymbol{N}_i$，内力则为各质点对它的作用力 $\boldsymbol{F}_{ij}$（$j=1$，2，…，n 且 $j\neq i$），它在此瞬时的加速度用 $\boldsymbol{a}_i$ 表示。如果在此质点上虚加一惯性力

$$\boldsymbol{F}_{gi} = -m_i\boldsymbol{a}_i \tag{2.4.8}$$

由质点的达朗伯原理（式（2.4.7））知，该质点所承受的系统外的主动力 $\boldsymbol{F}_i$、约束力 $\boldsymbol{N}_i$、系统内各质点对它的作用力 $\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\boldsymbol{F}_{ij}$ 将与惯性力 $\boldsymbol{F}_{gi}$ 组成一平衡的汇交力系，即

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{N}_i + \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{F}_{gi} = 0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

每个质点都可以建立一个这样的平衡的汇交力系，将这 n 个平衡力系相加，将组成一平衡的空间任意力系，这个平衡力系的矢量和及对任意点的力矩的矢量和均应等于零。

即

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i + \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\boldsymbol{F}_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{gi} = 0 \tag{2.4.9}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i + \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{N}_i + \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i \times \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\boldsymbol{F}_{ij}) + \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{gi} = 0 \tag{2.4.10}$$

应用作用反作用定律，$\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji}$，如图 2-4-2 所示，则有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\boldsymbol{F}_{ij} = 0 \tag{2.4.11}$$

$$\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_{ji} = (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{F}_{ij} = \boldsymbol{r}_{ji} \times \boldsymbol{F}_{ij}$$

注意到 $\boldsymbol{r}_{ji}$、$\boldsymbol{F}_{ij}$、$\boldsymbol{F}_{ji}$ 共线，于是上式等于零，即

$$\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_{ji} = 0$$

所以有

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i \times \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\boldsymbol{F}_{ij}) = 0 \tag{2.4.12}$$

将式（2.4.11）和式（2.4.12）代入式（2.4.9）和式（2.4.10），得

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i + \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_i + \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{gi} = 0 \tag{2.4.13}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_i) + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{N}_i) + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_{gi}) = 0 \tag{2.4.14}$$

这就是**质点系的达朗伯原理**，表述为在质点系运动的任意瞬时，作用于各质点的外力与虚加于各质点的惯性力组成一平衡力系，从而这些力的矢量和等于零，这些力对任意点的力矩矢量之和等于零。对于给定的直角坐标系，式（2.4.13）和式（2.4.14）可以写作投影形式，即

图 2－4－2

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} F_{ix} + \sum_{i=1}^{n} N_{ix} + \sum_{i=1}^{n} F_{gix} &= 0 \\
\sum_{i=1}^{n} F_{iy} + \sum_{i=1}^{n} N_{iy} + \sum_{i=1}^{n} F_{giy} &= 0 \\
\sum_{i=1}^{n} F_{iz} + \sum_{i=1}^{n} N_{iz} + \sum_{i=1}^{n} F_{giz} &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{2.4.15}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} m_x(\boldsymbol{F}_i) + \sum_{i=1}^{n} m_x(\boldsymbol{N}_i) + \sum_{i=1}^{n} m_x(\boldsymbol{F}_{gi}) &= 0 \\
\sum_{i=1}^{n} m_y(\boldsymbol{F}_i) + \sum_{i=1}^{n} m_y(\boldsymbol{N}_i) + \sum_{i=1}^{n} m_y(\boldsymbol{F}_{gi}) &= 0 \\
\sum_{i=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_i) + \sum_{i=1}^{n} m_z(\boldsymbol{N}_i) + \sum_{i=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_{gi}) &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{2.4.16}$$

式（2.4.15）和式（2.4.16）共有 6 个平衡方程，只能用来求解自由度不大于 6 的质点系的动力学问题。可以看出，在各种运动类型的质点系中，分析研究虚加于其上的惯性力系的简化结果是有意义的。

2.5 惯性力系的简化

2.5.1 一般质点系的情形

设某质点系由 n 个质点组成。各质点的质量用 m_i 表示，各质点的位置用它对固定参考点 O 的矢径 $\boldsymbol{r}_i$ 表示。若该质点系的质心在几

何点 C 处，应用质心坐标公式，有

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i \tag{2.5.1}$$

或

$$M\boldsymbol{r}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i \tag{2.5.2}$$

其中

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i \tag{2.5.3}$$

将式（2.5.2）对时间求一阶导数和二阶导数，则有

$$M\boldsymbol{v}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i \tag{2.5.4}$$

$$M\boldsymbol{a}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{a}_i \tag{2.5.5}$$

在任意瞬时，第 i 个质点的加速度为 $\boldsymbol{a}_i$（$i=1,2,\cdots,n$），虚加于各质点上的惯性力

$$\boldsymbol{F}_{gi} = -m_i \boldsymbol{a}_i$$

将组成一空间力系，应用力系简化理论，将此惯性力系向简化中心 O 简化，可获得该惯性力系等效作用于简化中心的主矢 $\boldsymbol{R}'_g$ 和主矩 $\boldsymbol{M}_{gO}$，即

$$\boldsymbol{R}'_g = \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_{gi}) = -\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{a}_i$$

将式(2.5.5)代人上式，得

$$\boldsymbol{R}'_g = -M\boldsymbol{a}_C \tag{2.5.6}$$

$$\boldsymbol{M}_{gO} = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_{gi}) = \sum_{i=1}^{n}[\boldsymbol{r}_i \times (-m_i\boldsymbol{a}_i)] = -\sum_{i=1}^{n}[\boldsymbol{r}_i \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i\boldsymbol{v}_i)]$$

注意到 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_i$，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} \times m_i\boldsymbol{v}_i = 0$，将这个等于零的项冠以负号放在上式等号的右侧，等号的右侧两项将形成 $-(\boldsymbol{r}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i)$ 的全导数，即

$$\boldsymbol{M}_{gO} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{m}_O(m_i\boldsymbol{v}_i)] \tag{2.5.7}$$

由式（2.5.6）和式（2.5.7）可以看出，一般质点系的惯性力系向任意固定点 O 简化，它的主矢量 $\boldsymbol{R}'_g$ 等于该质点系质心的加速度 $\boldsymbol{a}_C$ 乘以该质点系的总质量，再冠以负号；它的主矩矢量等于该质点系对此固定点 O 的动量矩对时间的一阶导数，再冠以负号。如果在给定瞬时，能够计算出该质点系质心的加速度以及该质点系对固定点 O 的动量矩，那么，由式（2.5.6）和式（2.5.7）可以算出与此瞬时相对应的惯性力系的主矢量和主矩矢量。在一般质点系的情况下，由于各质点的相对位置是变化的，计算它在某瞬时的质心加速度，它对某固定点的动量矩未必简便。刚体是特殊的质点系，体内各质点的相对位置是固定的，它的质心位置、惯性力系均有相对的确定值，因此，讨论刚体惯性力系的简化结果，对于达朗伯原理的应用是有意义的。

顺便指出，将式（2.5.6）和式（2.5.7）代入式（2.4.13）和式（2.4.14），得

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_i-M\boldsymbol{a}_C=0 \tag{2.5.8}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_i)+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{N}_i)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{m}_O(m_i\boldsymbol{v}_i)\right]=0 \tag{2.5.9}$$

质点系达朗伯原理的矢量方程（式（2.5.8））和矢量矩方程（式（2.5.9））变为质点系的质心运动定理和质点系的动量矩定理。这正好验证了2.1.1中讨论虚位移原理时的论述：由于牛顿定律、虚位移原理、达朗伯原理是一致的，在承认牛顿定律为力学基本原理的情况下，达朗伯原理可视为由牛顿定律推导出来的定理。

2.5.2 刚体的情形

2.5.2.1 平行移动的刚体

设某刚体作平行移动，它的总质量为 M，某瞬时它的加速度为 $\boldsymbol{a}$，各质点的加速度也都是 $\boldsymbol{a}$，取体内一质量元 $\mathrm{d}m$ 为研究对象，此瞬时，质量元 $\mathrm{d}m$ 的惯性力

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_g=-\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}m$$

此刚体各质量元的惯性力将组成一空间的同向平行力系。令此惯性力系向其质心 C 简化，并取质心 C 为各质量元矢径的参考点，则有 $\boldsymbol{r}_C=0, M=\int_M \mathrm{d}m$，于是简化后的惯性力系主矢量

$$\boldsymbol{R}'_g=\int_M \mathrm{d}\boldsymbol{F}_g=-\boldsymbol{a}\int_M \mathrm{d}m$$

所以有

$$\boldsymbol{R}'_g=-M\boldsymbol{a} \tag{2.5.10}$$

主矩矢量

$$\boldsymbol{M}_{gC}=\int_M(-\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}\mathrm{d}m)=-\left(\int_M \boldsymbol{r}\mathrm{d}m\right)\times\boldsymbol{a}$$

由式（2.5.2）得

$$\int_M \boldsymbol{r}\mathrm{d}m=M\boldsymbol{r}_C=0$$

有

$$\boldsymbol{M}_{gC}=0 \tag{2.5.11}$$

由式（2.5.10）和式（2.5.11）知，刚体作平行移动时，它的惯性力系可以简化为一个合力，此合力作用线通过质心 C，大小等于刚体的质量与此瞬时的加速度的乘积，方向则与加速度的方向相反，即

$$\boldsymbol{R}_g=-M\boldsymbol{a}$$

2.5.2.2 绕固定轴转动的刚体

1）一般情形下绕固定轴转动的刚体

假设某刚体绕固定轴转动，它的总质量为 M，选择转动轴上任一点 O 为原点，转动轴为 Oz 轴，建立固连于此刚体上的连体参考系 $Oxyz$。某瞬时，此刚体的角速度、角加速度为

$$\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k},\qquad \boldsymbol{\varepsilon}=\varepsilon\boldsymbol{k} \tag{2.5.12}$$

现在用式（2.5.6）和式（2.5.7）计算此刚体惯性力系的主矢量 $\boldsymbol{R}'_g$ 和主矩矢量 $\boldsymbol{M}_{gO}$。在计算过程中，要用到二重矢量积的关系

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$

为求主矢量 $\boldsymbol{R}'_g$，设 $C(x_C, y_C, z_C)$ 为此刚体的质心，有

$$\boldsymbol{r}_C=x_C\boldsymbol{i}+y_C\boldsymbol{j}+z_C\boldsymbol{k}$$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_C &= \boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_C)\\ &= \varepsilon\boldsymbol{k}\times(x_C\boldsymbol{i}+y_C\boldsymbol{j}+z_C\boldsymbol{k}) + \omega^2\{\boldsymbol{k}[\boldsymbol{k}\cdot(x_C\boldsymbol{i}+y_C\boldsymbol{j}+z_C\boldsymbol{k})]\\ &\quad -(x_C\boldsymbol{i}+y_C\boldsymbol{j}+z_C\boldsymbol{k})(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})\}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{a}_C = -\varepsilon(y_C\boldsymbol{i}-x_C\boldsymbol{j}) - \omega^2(x_C\boldsymbol{i}+y_C\boldsymbol{j})$$

得

$$\boldsymbol{R}'_g = -M\boldsymbol{a}_C = M\varepsilon(y_C\boldsymbol{i}-x_C\boldsymbol{j}) + M\omega^2(x_C\boldsymbol{i}+y_C\boldsymbol{j}) \tag{2.5.13}$$

此式等号右侧第一项为切向惯性力分量，第二项为法向惯性力分量。式（2.5.13）还可写成

$$\left.\begin{aligned}R'_{gx} &= -Ma_{Cx} = M(\varepsilon y_C + \omega^2 x_C)\\ R'_{gy} &= -Ma_{Cy} = M(-\varepsilon x_C + \omega^2 y_C)\end{aligned}\right\} \tag{2.5.13a}$$

为求主矩矢量 $\boldsymbol{M}_{gO}$，设刚体内任一质量元 $\mathrm{d}m$ 的矢径

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

此刚体对定点 O 的动量矩

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_O &= \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{M}_O(m_i\boldsymbol{v}_i) = \int_M \boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\mathrm{d}m = \omega\int_M[\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{k})]\mathrm{d}m\\ &= \omega\int_M(r^2\boldsymbol{k}-z\boldsymbol{r})\mathrm{d}m = \omega\int_M[-xz\boldsymbol{i}-yz\boldsymbol{j}+(x^2+y^2)\boldsymbol{k}]\mathrm{d}m\end{aligned}$$

则

$$L_O = -J_{xz}\omega\boldsymbol{i} - J_{yz}\omega\boldsymbol{j} + J_z\omega\boldsymbol{k} \tag{2.5.14}$$

其中

$$J_{xz} = \int_M xz\,\mathrm{d}m, \qquad J_{yz} = \int_M yz\,\mathrm{d}m \tag{2.5.15}$$

$$J_z = \int_M (x^2+y^2)\mathrm{d}m \tag{2.5.16}$$

J_{xz}、J_{yz}称为离心转动惯量，J_z 称为转动惯量。

将式（2.5.14）代入式（2.5.7），惯性力系对 O 点的主矩矢量

$$\boldsymbol{M}_{gO} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L}_O = \varepsilon(J_{xz}\boldsymbol{i}+J_{yz}\boldsymbol{j}-J_z\boldsymbol{k}) + \omega\left(J_{xz}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t}+J_{yz}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t}-J_z\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t}\right)$$

应用泊松（Poisson）公式，有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}=\omega\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\omega\boldsymbol{j}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{j}=\omega\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\omega\boldsymbol{i}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{k}=\omega\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0$$

所以 $\boldsymbol{M}_{gO}=\varepsilon\ (J_{xz}\boldsymbol{i}+J_{yz}\boldsymbol{j}-J_z\boldsymbol{k})\ +\omega^2\ (-J_{yz}\boldsymbol{i}+J_{xz}\boldsymbol{j})$

即

$$\boldsymbol{M}_{gO}=(\varepsilon J_{xz}-\omega^2J_{yz})\ \boldsymbol{i}+(\varepsilon J_{yz}+\omega^2J_{xz})\ \boldsymbol{j}-\varepsilon J_z\boldsymbol{k}\qquad(2.5.17)$$

或

$$\left.\begin{aligned}M_{gOx}&=\varepsilon J_{xz}-\omega^2J_{yz}\\M_{gOy}&=\varepsilon J_{yz}+\omega^2J_{xz}\\M_{gOz}&=-\varepsilon J_z\end{aligned}\right\}\qquad(2.5.17a)$$

2）特殊情形——刚体有质量对称面，而且转动轴垂直于此对称面的情形

在此情形中，转动刚体的惯性力系首先可以简化为虚加于此质量对称面内的平面惯性力系。其次，可以由一般情形中惯性力系的简化结果来推算此种特殊情形中的简化结果。为此，仍用 M 表示此刚体的总质量，选择转动轴与对称面的交点 O 为原点，Oz 为转动轴，建立连体参考系 $Oxyz$。由于 Oxy 在质量对称面内，于是式（2.5.15）表示的该刚体的离心转动惯量等于零，即

$$J_{xz}=J_{yz}=0\qquad(2.5.18)$$

在某瞬时，仍设此刚体的角速度、角加速度分别为 $\boldsymbol{\omega}$、$\boldsymbol{\varepsilon}$，如式(2.5.12)。将式（2.5.18）代入式（2.5.13a）和式（2.5.17a)，获得在此瞬时，此刚体的惯性力系向原点 O 简化的主矢量 $\boldsymbol{R}'_g$ 和主矩矢量 $\boldsymbol{M}_{gO}$ 为

$$\left.\begin{aligned}R'_{gx}&=-Ma_{Cx}=M(\varepsilon y_C+\omega^2x_C)\\R'_{gy}&=-Ma_{Cy}=M(-\varepsilon x_C+\omega^2y_C)\\\boldsymbol{M}_{gO}&=M_{gOz}\boldsymbol{k}=-\varepsilon J_z\boldsymbol{k}\end{aligned}\right\}\qquad(2.5.19)$$

最后，将简化中心由坐标原点 O 挪至质心 C，看看简化结果会有什么变化。

由力系的简化理论知，不论选择哪一个点做简化中心，简化后的力系主矢量是不会变化的，而对简化中心 C 的主矩矢量则等于力系对原简化中心 O 的主矩矢量与在原简化中心 O 处的主矢量对新简化中心 C 的力矩矢量的矢量和，即

$$\boldsymbol{M}_{gC} = \boldsymbol{M}_{gO} + \boldsymbol{r}_{CO} \times \boldsymbol{R}'_g$$

注意到 $\boldsymbol{r}_{CO} = -\boldsymbol{r}_C = -(x_C\boldsymbol{i} + y_C\boldsymbol{j})$，连同式（2.5.19）一并代入上式，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_{gC} &= -\varepsilon J_z\boldsymbol{k} - (-x_C\boldsymbol{i} - y_C\boldsymbol{j}) \times M[(\varepsilon y_C + \omega^2 x_C)\boldsymbol{i} + (-\varepsilon x_C + \omega^2 y_C)\boldsymbol{j}] \\ &= -\varepsilon J_z\boldsymbol{k} - M[x_C(-\varepsilon x_C + \omega^2 y_C) - y_C(\varepsilon y_C + \omega^2 x_C)]\boldsymbol{k} \\ &= -\varepsilon[J_z - M(x_C^2 + y_C^2)]\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{M}_{gC} = -\varepsilon J_{Cz}\boldsymbol{k}$$

其中

$$J_{Cz} = J_z - M(x_C^2 + y_C^2) = J_z - Mr_C^2 \tag{2.5.20}$$

为转动惯量平移定理的应用。由此可知，此刚体的惯性力系向其质心 C 简化的主矢量 $\boldsymbol{R}'_g$、主矩矢量 $\boldsymbol{M}_{gC}$ 为

$$\left.\begin{aligned}R'_{gx} &= -Ma_{Cx} = M(\varepsilon y_C + \omega^2 x_C) \\ R'_{gy} &= -Ma_{Cy} = M(-\varepsilon x_C + \omega^2 y_C) \\ \boldsymbol{M}_{gC} &= M_{gCz}\boldsymbol{k} = -\varepsilon J_{Cz}\boldsymbol{k}\end{aligned}\right\} \tag{2.5.21}$$

2.5.2.3 平面运动的刚体

由刚体的平面运动理论知，刚体的平面运动可以简化为平面图形在其自身平面内的运动，因此，平面运动刚体的惯性力系可简化为平面力系。

设平面图形（即刚体）的质量为 M，质心在 C 点。建立固定坐标系 $Oxyz$（$z=0$），再以质心 C 为基点，建立平移参考坐标系 $Cx'y'$，质心 C 的坐标、体内任一质量元 $\mathrm{d}m$ 的坐标分别为

$$\boldsymbol{r}_C = x_C\boldsymbol{i} + y_C\boldsymbol{j}, \qquad \boldsymbol{r}'_C = 0$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{r}', \qquad \boldsymbol{r}' = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j}$$

某瞬时，假设此刚体质心的速度、加速度为$\boldsymbol{v}_C$和$\boldsymbol{a}_C$，刚体绕质心 C 转动的角速度、角加速度为 $\boldsymbol{\omega}$ 和$\boldsymbol{\varepsilon}$ 。由于 $\omega_x=\omega_y=0$，$\varepsilon_x=\varepsilon_y=0$，

则
$$\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}=\varepsilon\boldsymbol{k}$$

为便于惯性力系的简化演算，先看看以下参量、矢量的运算结果。

$$\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{k}=(x'\boldsymbol{i}+y'\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{k}=0 \tag{2.5.22}$$

$$\int_M \mathrm{d}m=M \tag{2.5.23}$$

$$\int_M \boldsymbol{r}'\mathrm{d}m=M\boldsymbol{r}'_C=0 \tag{2.5.24}$$

$$\int_M (\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}')\mathrm{d}m=\int_M (x'^2+y'^2)\mathrm{d}m=J_{Cz} \tag{2.5.25}$$

先计算惯性力系的主矢量 $\boldsymbol{R}'_g$。此瞬时，质量元 $\mathrm{d}m$ 的加速度、惯性力为

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_C+\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_g=-\boldsymbol{a}\mathrm{d}m=-[\boldsymbol{a}_C+\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}m$$

虚加于此刚体上的惯性力向质心 C 简化的主矢量

$$\boldsymbol{R}'_g=\int_M \mathrm{d}\boldsymbol{F}_g=-\boldsymbol{a}_C\int_M \mathrm{d}m-\varepsilon\boldsymbol{k}\times\int_M \boldsymbol{r}'\mathrm{d}m$$
$$-\omega^2\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\int_M \boldsymbol{r}'\mathrm{d}m)$$

将式（2.5.23）和式（2.5.24）代入上式，得

$$\boldsymbol{R}'_g=-M\boldsymbol{a}_C \tag{2.5.26}$$

再计算主矩矢量

$$\boldsymbol{M}_{gC}=\int_M \boldsymbol{r}'\times\mathrm{d}\boldsymbol{F}_g=-\int_M \boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{a}_C\mathrm{d}m-\varepsilon\int_M \boldsymbol{r}'\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}')\mathrm{d}m$$
$$-\omega^2\int_M \boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}')\mathrm{d}m$$
$$=-(\int_M \boldsymbol{r}'\mathrm{d}m)\times\boldsymbol{a}_C-\varepsilon\int_M [\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}')-\boldsymbol{r}'(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{k})]\mathrm{d}m$$
$$-\omega^2\int_M \boldsymbol{r}'\times[\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}')-\boldsymbol{r}'(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})]\mathrm{d}m$$

将式（2.5.24）、式（2.5.25）和式（2.5.22）代入上式，得

$$\boldsymbol{M}_{gC} = -\varepsilon J_{Cz}\boldsymbol{k} \tag{2.5.27}$$

还有两种特殊情形分别说明如下。

（1）如果没有相对质心 C 的转动，即 $\omega \equiv 0$，$\varepsilon \equiv 0$，式（2.5.26）和式（2.5.27）变为

$$\boldsymbol{R}'_g = -M\boldsymbol{a}_C$$

$$\boldsymbol{M}_{gC} = 0$$

这是平行移动刚体惯性力系简化的结果，它与式（2.5.10）和式（2.5.11）是一致的。

（2）如果没有随同质心 C 的平行移动，即 $\boldsymbol{v}_C \equiv 0$，$\boldsymbol{a}_C \equiv 0$，式（2.5.26）和式（2.5.27）变为

$$\boldsymbol{R}'_g = -M\boldsymbol{a}_C = 0$$

$$\boldsymbol{M}_{gC} = -J_{Cz}\varepsilon\boldsymbol{k}$$

这是绕定轴转动刚体惯性力系的简化结果，不过它还加上这样的条件：刚体有质量对称面，转动轴垂直于质量对称面，并且通过质心 C（即 $a_{Cx} = a_{Cy} = 0$）。它与式（2.5.21）是一致的。

2.5.2.4　绕固定点转动的刚体

假设某刚体绕固定点 O 转动，它的质量为 M，质心在 C 点上。选择固定点 O 为原点，建立一组属于惯量主轴的连体参考坐标系 $O\xi\eta\zeta$。此坐标系上的三个单位矢量分别用 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 表示，质心 C 的矢径及任意瞬时的角速度、角加速度为

$$\boldsymbol{r}_C = \xi_C\boldsymbol{e}_1 + \eta_C\boldsymbol{e}_2 + \zeta_C\boldsymbol{e}_3 \tag{2.5.28}$$

$$\boldsymbol{\omega}_C = \omega_1\boldsymbol{e}_1 + \omega_2\boldsymbol{e}_2 + \omega_3\boldsymbol{e}_3 \tag{2.5.29}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_1\boldsymbol{e}_1 + \varepsilon_2\boldsymbol{e}_2 + \varepsilon_3\boldsymbol{e}_3 \tag{2.5.30}$$

如果在此刚体的各质量元上加上相应的惯性力，组成一空间的惯性力系，并将此力系向固定点 O 简化，通过演算（演算过程留到习题中完成），可以得到此惯性力系的主矢量

$$\boldsymbol{R}'_g = -M\boldsymbol{a}_C = -M[\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_C)] \tag{2.5.31}$$

和主矩矢量

$$M_{gO} = M_{gO1}e_1 + M_{gO2}e_2 + M_{gO3}e_3 \tag{2.5.32}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} M_{gO1} &= -J_1\varepsilon_1 - \omega_2\omega_3\ (J_3 - J_2) \\ M_{gO2} &= -J_2\varepsilon_1 - \omega_3\omega_1\ (J_1 - J_3) \\ M_{gO3} &= -J_3\varepsilon_3 - \omega_1\omega_2\ (J_2 - J_1) \end{aligned}\right\} \tag{2.5.33}$$

2.5.2.5　一般运动的刚体

假设某刚体的质量为 M，在空间做一般运动。今以其质心 C 为原点，建立一组属于中心惯量主轴的连体参考坐标系 $O\xi\eta\zeta$。在此坐标系上的三个单位矢量分别用 e_1、e_2、e_3 表示。此刚体对这三个中心惯量主轴的转动惯量分别用 J_1、J_2、J_3 表示。在任意瞬时，设此刚体的质心的速度、加速度分别为 $\boldsymbol{v}_C$、$\boldsymbol{a}_C$，绕质心 C 转动的角速度 $\boldsymbol{\omega}$、角加速度 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 如式（2.5.29）、式（2.5.30）。如果在此刚体的各质量元上加上相应的惯性力，组成一空间的惯性力系，再将此力系向质心 C 简化，通过演算（演算过程留到习题中完成），可以得到此惯性力系的主矢量

$$R'_g = -Ma_C \tag{2.5.34}$$

和主矩矢量

$$M_{gO} = M_{gC1}e_1 + M_{gC2}e_2 + M_{gC3}e_3 \tag{2.5.35}$$

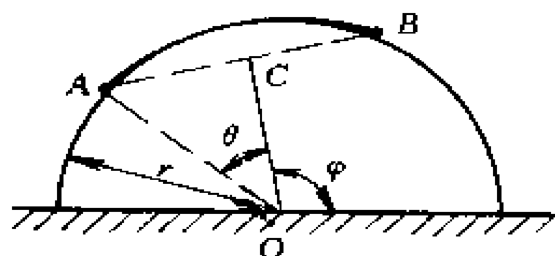
其中

$$\left.\begin{aligned} M_{gC1} &= -J_1\varepsilon_1 - (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 \\ M_{gC2} &= -J_2\varepsilon_1 - (J_1 - J_3)\omega_3\omega_1 \\ M_{gC3} &= -J_3\varepsilon_3 - (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 \end{aligned}\right\} \tag{2.5.36}$$

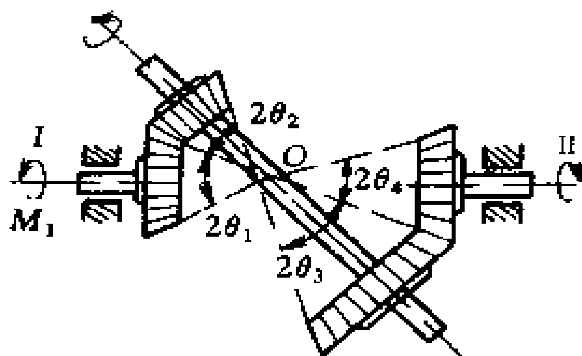
习　　题

2-1　均质链条的两端分别固连 A、B 小球，放置在半径为 r 的光滑圆柱面上，如题 2-1 图所示。已知球 A 重 P，球 B 重 Q，链条的单位长度的重量为 ρ。O 为圆柱面的圆心，$OC\perp AB$，OC 线与 OA 线的夹角用 θ 表示，试求平衡时，OC 与水平线的夹角 φ。

2－2 减速器由具有公共锥面的四个圆锥轮组成，其顶角分别为 $2\theta_1$、$2\theta_2$、$2\theta_3$ 和 $2\theta_4$，如题 2－2 图所示。主动轴Ⅰ上作用一转矩 M_1，试求传给轴Ⅱ上的转矩 M_2。不计摩擦。



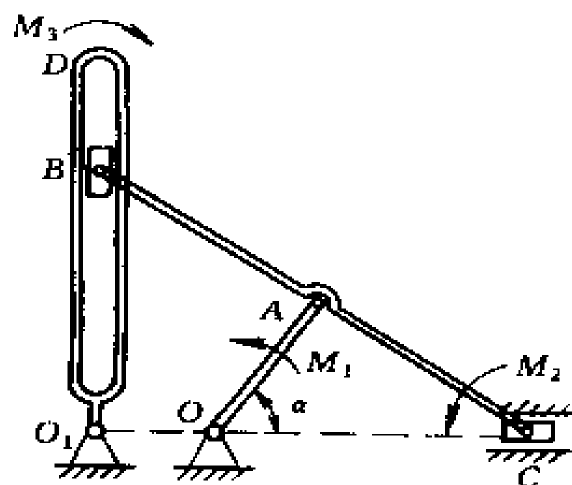
题 2－1 图



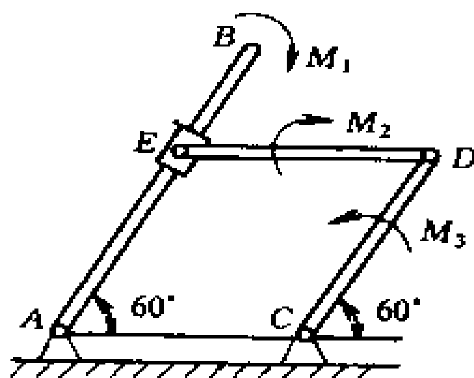
题 2－2 图

2－3 曲柄连杆－滑道摇杆机构在题 2－3 图所示位置上处于平衡状态，其中摇杆 O_1D 位于铅垂位置，O_1、O、C 三点处于同一水平线上，$AB=AC$，$\angle OAC=90°$，$\angle AOC=\alpha$（$\alpha\neq45°$）。试给出 O_1D 杆、OA 杆和 BC 杆的虚角速度之间的关系。

2－4 由 AB、CD、DE 三杆组成的系统中，$AC=CD=DE$。今在三杆上分别作用一力偶，并在题 2－4 图所示位置平衡。已知 M_1，求 M_2 和 M_3。各杆的质量不计。



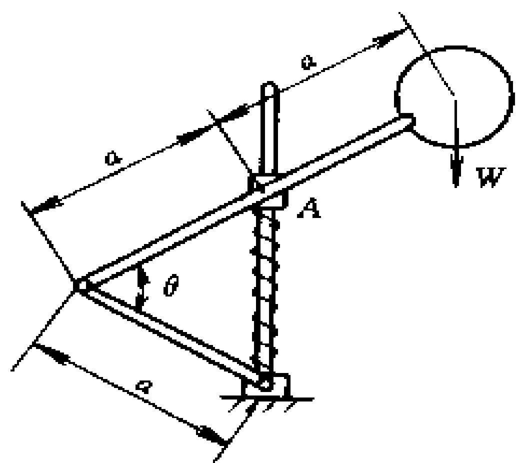
题 2－3 图



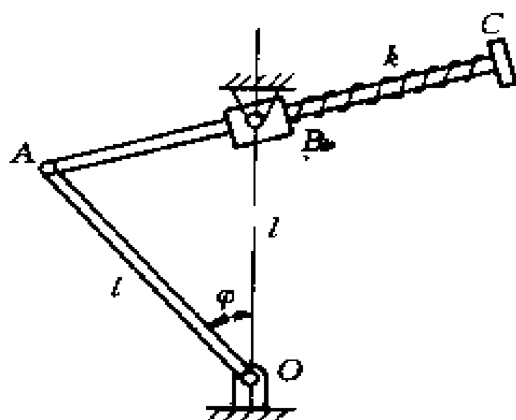
题 2－4 图

2－5 题 2－5 图所示系统中，当 $\theta=180°$时，劲度系数为 k 的弹簧没有变形。试求除 $\theta=180°$以外的其他平衡位置所对应的 θ 角。略去杆的质量和套环 A 在铅直杆上滑动时的摩擦。

2－6 一重 W 的均质门的横截面如题 2－6 图所示。OA 为门扇，其高度 $OA=l$，O 为铰链支座。当 $\varphi=0$ 时，弹簧没有变形。已知劲度系数为 k，试证：若选择恰当的劲度系数，则此门在任何位置均能处于平衡状态。AC 杆的重量可以忽略。



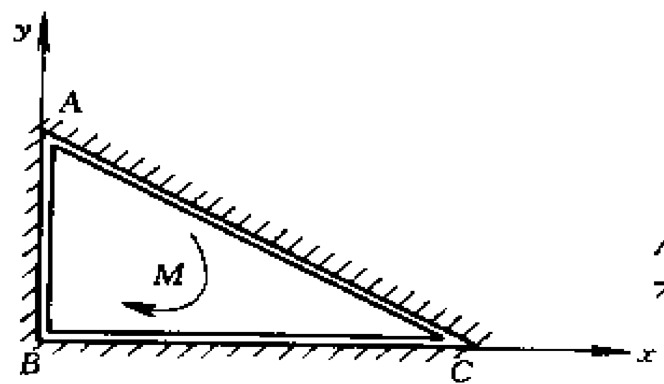
题 2－5 图



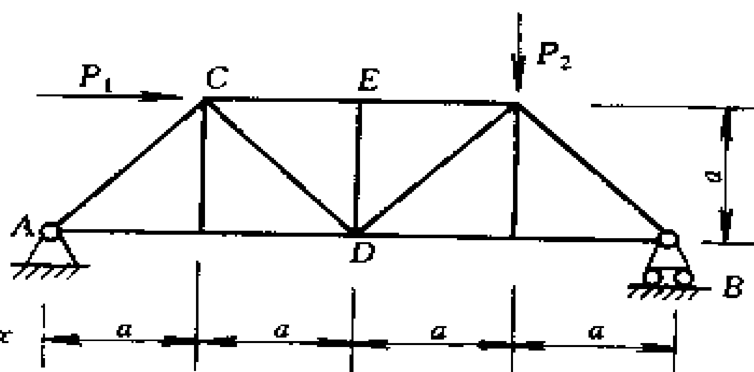
题 2－6 图

2－7 某种钥匙的截面可以简化为一直角三角形（题 2－7 图），其直角边 $AB=a$，$BC=b$。若在钥匙上作用一个力偶，它的力偶矩为 M。试求其顶点 A、B、C 对锁孔边上的压力。各处的摩擦可以忽略。钥匙与孔之间的间隙很小。

2－8 题 2－8 图所示桁架承受水平力 P_1 和铅直力 P_2 的作用，试求 CD 杆、CE 杆的内力。



题 2－7 图



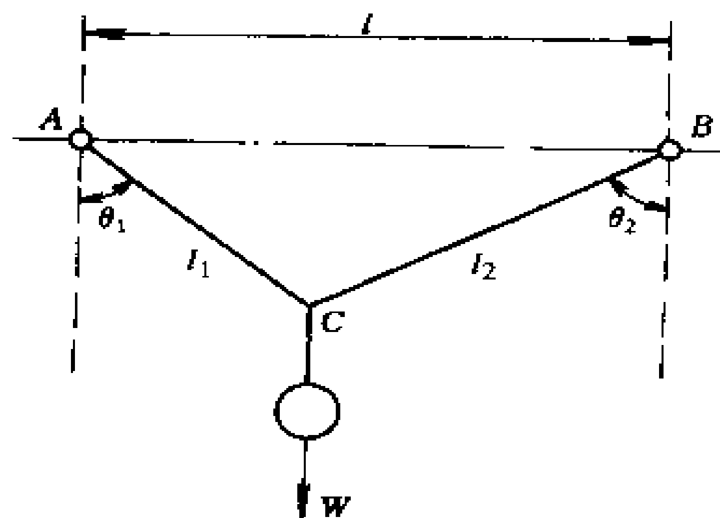
题 2－8 图

2－9 绳 AC、BC 分别固结在同一水平高度的钉子 A、B 上（题 2－9 图），在此二绳的连结处 C 悬挂一重量 $W=500$ N 的重物。

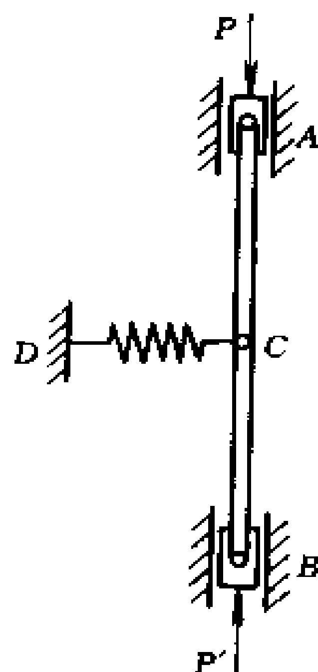
已知 AB 的间距 $l=10\text{ m}$，绳 AC 无弹性，长度 $l_1=5\text{ m}$，绳 BC 的劲度系数 $k=5\,000\text{ N/m}$，无变形时，它的长度 $l_2=6\text{ m}$。试求此系统平衡时绳 AC、BC 与铅垂线的夹角 θ_1 和 θ_2。

提示：当求解出夹角应满足的条件为超越方程时，可采用试凑法求其近似解。

2－10 两根长度皆为 l 的杆 AC、BC 用铰链 C 相连，并在 C 端系一水平弹簧。此二杆的另一端分别与滑块 A、B 铰接，滑块可在铅直槽内滑动。在二滑块上分别作用铅直力 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{P}'$，且 $P=P'$，如题 2－10 图所示。当二杆处于铅直且对称的位置时，弹簧不受力，弹簧的劲度系数为 k，不计杆和滑块的重量，不计摩擦，试求此系统的平衡位置（用杆与铅直线之间的夹角 φ 表示），并分析其稳定性。



题 2－9 图



题 2－10 图

2－11 在题 2－11 图所示倒摆系统中，$AB=l$，$AC=2l$，弹簧 BC 的劲度系数为 k，当摆位于铅直倒立位置时，弹簧不受力。如果摆锤重为 W，杆质量不计，且 $\gamma=\dfrac{W}{2kl}<1$，试求摆的平衡位置，并分析其稳定性与参数 γ 的关系。

2－12 均质杆 AB、AD 用光滑铰链 A 连接，倚在光滑的固定圆柱上，如题 2－12 图所示。圆柱的半径为 r，其纵向轴水平，与图

面垂直，杆长各为$2l$。如用θ角表示A点至圆柱中心O的连线与铅直线之间的夹角，2φ表示二杆之间的夹角。试求此系统平衡时的位置θ和φ，并分析其稳定性。

2-13 某刚体绕固定点O转动，$O\xi\eta\zeta$为以O为原点、属于惯量主轴的连体坐标系，$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$为此坐标系的三个单位矢量。已知此刚体的质量为M，对$O\xi\eta\zeta$坐标轴的转动惯量为J_1、J_2、J_3；在某瞬时，其质心的加速度为$\boldsymbol{a}_C$，角速度、角加速度分别为

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\boldsymbol{e}_1 + \omega_2\boldsymbol{e}_2 + \omega_3\boldsymbol{e}_3$$

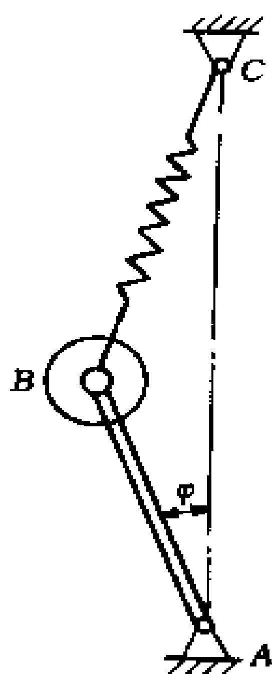
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_1\boldsymbol{e}_1 + \varepsilon_2\boldsymbol{e}_2 + \varepsilon_3\boldsymbol{e}_3$$

试推证此瞬时虚加于此刚体上的惯性力系向O点简化的主矢量

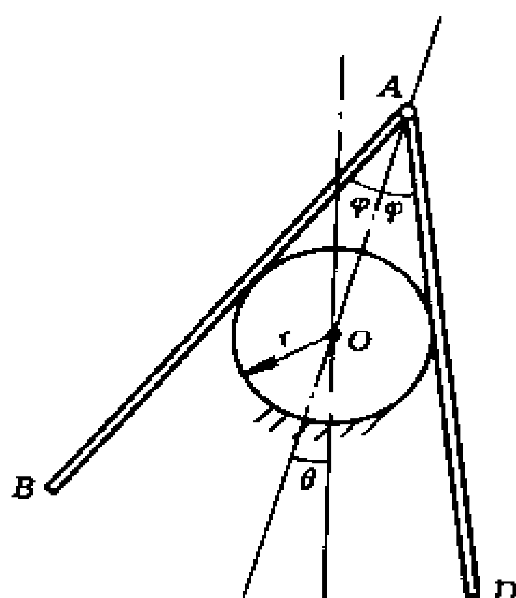
$$\boldsymbol{R}'_g = -M\boldsymbol{a}_C$$

主矩矢量

$$\boldsymbol{M}_{gO} = -[J_1\varepsilon_1 + (J_3 - J_2)\omega_3\omega_2]\boldsymbol{e}_1 - [J_2\varepsilon_2 + (J_1 - J_3)\omega_1\omega_3]\boldsymbol{e}_2 - [J_3\varepsilon_3 + (J_2 - J_1)\omega_2\omega_1]\boldsymbol{e}_3$$



题 2-11 图



题 2-12 图

2-14 某刚体在空间做一般运动，$C\xi\eta\zeta$为以其质心C为原点，属于中心惯量主轴的连体坐标系，$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$为此坐标系的三个单位

矢量。已知此刚体的质量为 M，对 $C\xi\eta\zeta$ 坐标轴的转动惯量为 J_1、J_2、J_3；在某瞬时，其质心的速度、加速度为 $\boldsymbol{v}_C$、$\boldsymbol{a}_C$，角速度、角加速度分别为

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \boldsymbol{e}_1 + \omega_2 \boldsymbol{e}_2 + \omega_3 \boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_1 \boldsymbol{e}_1 + \varepsilon_2 \boldsymbol{e}_2 + \varepsilon_3 \boldsymbol{e}_3$$

试推证此瞬时虚加于此刚体上的惯性力系向质心 C 简化的主矢量

$$\boldsymbol{R}'_{\mathrm{g}} = -M\boldsymbol{a}_C$$

主矩矢量

$$\boldsymbol{M}_{gC} = -(J_1\varepsilon_1 + (J_3 - J_2)\omega_3\omega_2)\boldsymbol{e}_1 - (J_2\varepsilon_2 + (J_1 - J_3)\omega_1\omega_3)\boldsymbol{e}_2 - (J_3\varepsilon_3 + (J_2 - J_1)\omega_2\omega_1)\boldsymbol{e}_3$$

第3章　动力学方程的三种基本形式

3.1　虚功形式的动力学方程——动力学普遍方程

虚功形式的动力学方程是虚位移原理与达朗伯原理简单结合的产物。

假设某质点系由 n 个质点组成，各质点的质量用 m_i 表示（$i=1, 2, \cdots, n$），作用于第 i 个质点上的主动力、约束力用 $\boldsymbol{F}_i$、$\boldsymbol{N}_i$ 表示，在任意瞬时，第 i 个质点的加速度为 $\boldsymbol{a}_i$。如果在此质点上虚加一惯性力 $\boldsymbol{F}_{gi}=-m_i\boldsymbol{a}_i$，根据达朗伯原理，在此瞬时，作用于此质点上的主动力 $\boldsymbol{F}_i$、约束力 $\boldsymbol{N}_i$ 和虚加的惯性力 $\boldsymbol{F}_{gi}$ 在形式上组成一平衡的汇交力系，即

$$\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{N}_i+\boldsymbol{F}_{gi}=0$$

对 n 个质点都作这样的处理，则在此瞬时，作用于此质点系上的主动力、约束力和虚加的惯性力在形式上组成一平衡的空间力系，即

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_i+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{gi}=0$$

如果此质点系的约束是理想约束，应用虚位移原理，则有

$$\sum_{i=1}^{n}\delta A_F=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{gi})\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

或

$$\sum_{i=1}^{n}\delta A_F=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i-m_i\boldsymbol{a}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \qquad (3.1.1)$$

这是**虚功形式的动力学方程**，简称**动力学普遍方程**，是拉格朗日于1760年导出的，也称达朗伯-拉格朗日方程。此方程可以表述为：在具有理想约束的质点系中，在任意瞬时和位形上，作用于各质点上的主动力和虚加的惯性力在任一虚位移上所做的元功之和等于零。它

在直角坐标系中的分解形式为

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i - m_i\ddot{x}_i)\delta x_i + (Y_i - m_i\ddot{y}_i)\delta y_i + (Z_i - m_i\ddot{z}_i)\delta z_i\right] = 0 \tag{3.1.2}$$

如果在式（3.1.2）中的质量、力和坐标采用统一的符号，可以改写为

$$\sum_{r=1}^{3n}(X_r - m_r\ddot{x}_r)\delta x_r = 0 \tag{3.1.3}$$

可以看出，在动力学普遍方程中不包含约束力。

在某质点系中，如果有的质点之间的联系并非理想约束，例如两质点之间用弹性绳连接等等，可以将这种非理想约束的内力视作主动力，仍然可以应用动力学普遍方程来分析这类质点系。现举例说明如下，例中连接各刚体之间的轮心轴承即属此列。

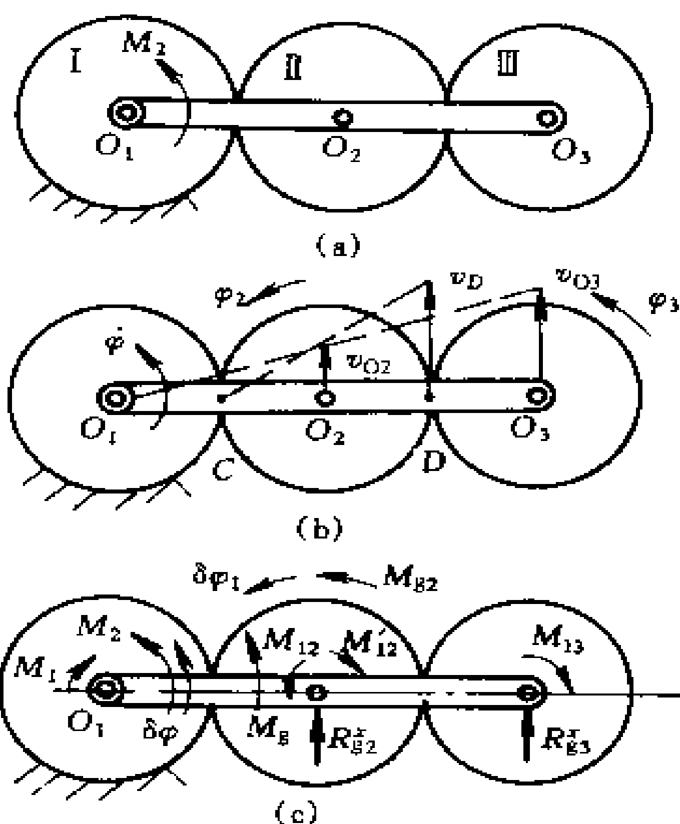


图 3-1-1

例 3-1 图3-1-1(a)所示行星轮系中，齿轮Ⅰ固定，由曲柄 O_1O_3 带动齿轮Ⅱ、Ⅲ在图示水平面内运动。这三个齿轮都视为均质圆盘，质量均为m_1，半径为 r，曲柄为均质杆，长 $4r$，质量为 m_2。各轮在接触点只滚不滑。在轮心轴承 O_1、O_2、O_3 处均有大小为 M_1 的摩擦力矩 现在曲柄上作用一常力偶矩 M_2，求曲柄的角加速度。

解： 此题可用多种方法求解，在这里仅用动力学普遍方程求解。

（1）运动分析

这是个单自由度的系统，取曲柄 O_1O_3 绕 O_1 轴转动的转角 φ 为

广义坐标。曲柄 O_1O_3 转动的角速度、角加速度用 $\dot{\varphi}$、φ 表示，均以逆时针转向为正向。

齿轮Ⅱ为平面运动，可以分解为随同基点 O_2 的平移和相对 O_2 的转动，在图 3－1－1（b）所示位置，它与齿轮Ⅰ的接触点 C 是它的瞬时速度中心，若齿轮Ⅱ在此瞬时的角速度用 $\dot{\varphi}_2$ 表示，则

$$v_{O2}=r\dot{\varphi}_2 \tag{a}$$

基点 O_2 又是曲柄 O_1O_3 上的一个点，它的速度又要满足 O_1O_3 转动的条件，即

$$v_{O2}=O_1O_2\cdot\dot{\varphi}_1=2r\dot{\varphi}_1 \tag{b}$$

由式(a)和式(b)解得

$$\dot{\varphi}_2=2\dot{\varphi}_1 \quad （逆时针） \tag{c}$$

再看齿轮Ⅲ，轮心 O_3 是曲柄 O_1O_3 上的一个点，其速度

$$v_{O3}=O_1O_3\cdot\dot{\varphi}_1=4r\dot{\varphi}_1 \tag{d}$$

它与齿轮Ⅱ在接触点 D 只滚不滑，于是，齿轮Ⅲ上 D 点速度等于齿轮Ⅱ上 D 点的速度，即

$$v_D=CD\cdot\dot{\varphi}_2=2r\dot{\varphi}_2=4r\dot{\varphi}_1 \tag{e}$$

由式(d)和式(e)可看出，齿轮Ⅲ的 O_3 和 D 两点的速度大小相等，方向相同，这表明齿轮Ⅲ为平移运动，$\dot{\varphi}_3=0$。

（2）受力分析

先看主动力。该系统在水平面内运动，曲柄、齿轮的重力与运动所在的平面垂直，重力的虚功为零，可以不画出来，主动力只有作用于曲柄 O_1O_3 上的常力偶矩 M_2。

再看约束力。由 1.5.3 知，齿轮Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ之间只滚动无滑动，属于理想约束。各轮心轴承是非理想约束，然而，如果将各轴承的摩擦力矩视为轮杆之间相互作用的主动力，各轴承仍可按理想约束对待，这些理想约束的约束力在图 3－1－1（c)中都没有画出来。以后，凡是不做虚功的力和力矩，均不示于图中，不再另述。

现在来分析各轴承摩擦力矩的转向和大小。

轴承 O_1：曲柄 O_1O_3 的角速度为 $\dot{\varphi}$（逆时针），齿轮Ⅰ不动，二

者的相对角速度为 $\dot{\varphi}$，因此，在轴承 O_1 处，齿轮Ⅰ给予曲柄 O_1O_3 的摩擦力矩为 M_1（顺时针），曲柄 O_1O_2 给予齿轮Ⅰ的为 M_1'（逆时针）。

轴承 O_2：曲柄 O_1O_3 的角速度为 $\dot{\varphi}$（逆时针），齿轮Ⅱ的角速度为 $\dot{\varphi}_2$（逆时针），且 $\dot{\varphi}_2 = 2\dot{\varphi}$，二者的相对角速度为 $\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi} = \dot{\varphi}$，因此，在轴承 O_2 处，齿轮Ⅱ给予曲柄 O_1O_3 的摩擦力矩为 M_{12}（逆时针），曲柄 O_1O_3 给予齿轮Ⅱ的为 M_{12}'（顺时针），且 $M_{12} = M_{12}' = M_l$。

轴承 O_3：曲柄 O_1O_3 的角速度为 $\dot{\varphi}$（逆时针），齿轮Ⅲ平动，$\dot{\varphi}_3 = 0$，二者的相对角速度仍为 $\dot{\varphi}$。在轴承 O_3 处，齿轮Ⅲ给予曲柄的摩擦力矩为 M_{13}（顺时针），曲柄给予齿轮Ⅲ的为 M_{13}'（逆时针），且 $M_{13} = M_{13}' = M_l$。

然后看惯性力。在图示位置和瞬时，设曲柄 O_1O_3 的角加速度为 φ，由运动分析知，$\varphi_2 = 2\varphi$，$\dot{\varphi}_3 = 0$。

曲柄 O_1O_3 绕固定轴 O_1 转动，由 2.5.2 知，它的惯性力系向 O_1 简化的主矢量、主矩矢量由式(2.5.19)确定，即

$$\left.\begin{aligned} R_g^\tau &= -m_2 a_{O2}^\tau = -m_2 \cdot 2r\varphi = -2m_2 r\varphi \\ R_g^n &= -m_2 a_{O2}^n = -m_2 \cdot 2r\dot{\varphi}^2 = -2m_2 r\dot{\varphi}^2 \end{aligned}\right\} \tag{f}$$

$$M_g = -\dot{\varphi}J_{O1} = -\frac{1}{3}m_2(4r)^2\varphi = -\frac{16}{3}m_2 r^2\varphi \tag{g}$$

齿轮Ⅱ为平面运动，由 2.5.2 知，它的惯性力系向其质心 O_2 简化的主矢量、主矩矢量由式(2.5.26)和式(2.5.27)确定，即

$$\left.\begin{aligned} R_{g2}^\tau &= -m_1 a_{O2}^\tau = -2m_1 r\varphi \\ R_{g2}^n &= -m_1 a_{O2}^n = -2m_1 r\dot{\varphi}^2 \end{aligned}\right\} \tag{h}$$

$$M_{g2} = -J_{O2}\varphi_2 = -\frac{1}{2}m_1 r^2 \varphi_2 = -m_1 r^2 \varphi \tag{i}$$

齿轮Ⅲ为平移运动，由 2.5.2 知，它的惯性力系向其质心 O_3 简化为一合力，即

$$\left.\begin{aligned} R_{g3}^\tau &= -m_1 a_{O3}^\tau = -4m_1 r\dot{\varphi} \\ R_{g3}^n &= -m_1 a_{O3}^n = -4m_1 r\dot{\varphi}^2 \end{aligned}\right\} \tag{j}$$

顺便说一下，在图(c)中，各惯性力系主矢和主矩都是按加速度、角加速度的正向画的。如果按加速度和角加速度相反的方向画，那么，在计算它们的大小的公式中，就不要冠以负号了。

(3) 虚位移、虚功、虚功方程

此系统的约束都是定常的完整的理想约束，它的实位移是诸多虚位移中的一个(参见 1.4.3)，因此，可以假设广义坐标的虚位移 $\delta\varphi$ 与角速度 φ 同向；在齿轮Ⅱ中，质心 O_2 的虚位移 $\delta \boldsymbol{r}_{O2}$ 与 $\boldsymbol{v}_{O2}$ 同向，齿轮Ⅱ的转动虚位移 $\delta\varphi_2$ 与角速度 φ_2 同向，而且有

$$\delta\varphi_2 = 2\delta\varphi$$

为便于计算各力的虚功，将此系统的力尽可能集中到某几个刚体上。集中到曲柄 O_1O_3 上的力有常力偶矩 M_2，齿轮Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ给予它的摩擦力矩 M_1、M_{12}、M_{13}，曲柄的惯性力主矢量 $\boldsymbol{R}_g$、惯性力主矩 M_g，齿轮Ⅱ、Ⅲ的惯性力主矢量 $\boldsymbol{R}_{g2}$、$\boldsymbol{R}_{g3}$。这些力对 O_1 轴的矩为

$$m_{O1}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}_g) = M_2 - M_1 + M_{12} - M_{13} + R_{g2}^{\tau}\cdot 2r + R_{g3}^{\tau}\cdot 4r + M_g$$

将 $M_{12} = M_{13} = M_1$ 及式(f)、式(g)、式(h)、式(i)代入上式，得

$$m_{O1}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}_g) = M_2 - M_1 - (\frac{16}{3}m_2 + 20m_1)r^2\varphi$$

则

$$\delta A_{I_1} = m_{O1}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}_g)\delta\varphi = [M_2 - M_1 - (\frac{16}{3}m_2 + 20m_1)r^2\varphi]\delta\varphi \quad (l)$$

集中到齿轮Ⅱ上的力有曲柄给予它的摩擦力矩 M'_{12}、齿轮Ⅱ的惯性力主矩 M_{g2}，它们对 O_2 的矩为

$$m_{O2}(\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{F}_g) = M_{g2} - M'_{12}$$

将 $M'_{12} = M_1$ 及式 (i) 代入上式，得

$$m_{O2}(\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{F}_g) = -m_1r^2\varphi - M_1$$

所以
$$\delta A_{I_2} = m_{O2}(\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{F}_g)\cdot\delta\varphi_2 = -2(M_1 + m_1r^2\varphi)\delta\varphi \quad (m)$$

将式(l)和式(m)代入虚功方程式(3.1.1)，得

$$\sum_{i=1}^{2} \delta A_F = \delta A_{F_1} + \delta A_{F_2} = 0,$$

$$[M_2 - 3M_1 - \frac{2}{3}(8m_2 + 33m_1)r^2\varphi]\delta\varphi = 0$$

所以 $$\varphi = \frac{3(M_2 - 3M_1)}{2(33m_1 + 8m_2)r^2} \quad (逆时针)$$

3.2 虚功率形式的动力学方程

3.2.1 虚功率形式的动力学方程

假设某质点系由 n 个质点组成，内有 d 个完整约束，g 个非完整约束，在 1.4.5 中曾经介绍过虚速度的概念，在给定的瞬时和位形上，质点系的虚速度是约束允许的速度，它是非时间参量的变化引起的，可以是有限量。

设在任意瞬时，此质点系的第 i 个质点的加速度为 $\boldsymbol{a}_i$，根据达朗伯原理，在此瞬时作用在此质点上的主动力 $\boldsymbol{F}_i$、约束力 $\boldsymbol{N}_i$ 和虚加的惯性力 $\boldsymbol{F}_{gi} = -m_i\boldsymbol{a}_i$ 在形式上组成一平衡的汇交力系，即

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{N}_i + \boldsymbol{F}_{gi} = 0$$

在此瞬时和相对应的位形上，给出各质点的虚速度 $\Delta\dot{\boldsymbol{r}}_i$，并在上式等号两侧同时点乘其虚速度 $\Delta\dot{\boldsymbol{r}}_i$，得第 i 个质点的虚功率

$$\Delta P_i = (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{N}_i + \boldsymbol{F}_{gi}) \cdot \Delta\dot{\boldsymbol{r}}_i = 0$$

对 n 个质点都做这样的处理，再对 i 求和，得此质点系的虚功率之和，即

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta P_i = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{N}_i + \boldsymbol{F}_{gi}) \cdot \Delta\dot{\boldsymbol{r}}_i = 0 \tag{A}$$

如果此质点系是理想约束，由于虚速度 $\Delta\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 与虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_i$ 一样，它位于约束曲面在第 i 个质点所在位置的点的切平面内，参见式(1.4.19)，即

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{N}_i \cdot \Delta\dot{\boldsymbol{r}}_i = 0$$

于是，式(A)可改写为

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta P_i = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F}_i - m_i \boldsymbol{a}_{gi}) \cdot \Delta \dot{\boldsymbol{r}}_i = 0 \tag{3.2.1}$$

这是**虚功率形式的动力学方程**，是若丹(Jourdain P. E. B.)于 1908 年导出的，也称**若丹原理**，可表述为在具有理想约束的质点系中，在任意瞬时和位形上，作用于各质点上的主动力和虚加的惯性力在任一虚速度上所做的元功率之和等于零。它在直角坐标中的分解形式为

$$\sum_{i=1}^{n} [(X_i - m_i \ddot{x}_i)\delta \dot{x}_i + (Y_i - m_i \ddot{y}_i)\delta \dot{y}_i + (Z_i - m_i \ddot{z}_i)\delta \dot{z}_i] = 0 \tag{3.2.2}$$

如果质量、力和坐标采用统一的符号，式(3.2.2)可以改写为

$$\sum_{r=1}^{3n} (X_r - m_r \ddot{x}_r)\delta \dot{x}_r = 0 \tag{3.2.3}$$

分析刚体或刚体系的运动时，应用虚功率形式的动力学方程要比虚功形式的简便些。

例 3-2 图 3-2-1(a)中，绞车 O 在常力矩 M 作用下，曳引均质圆轮 C，使它沿着斜面向上滚动而无滑动。已知：斜面的倾角为 θ，绞车的半径为 r，质量为 m_O，回转半径为 ρ，圆轮 C 的质量为 m_C，半径为 R，绳索的质量和轴承摩擦均可忽略不计。求此圆轮中心的加速度 $\boldsymbol{a}_C$。

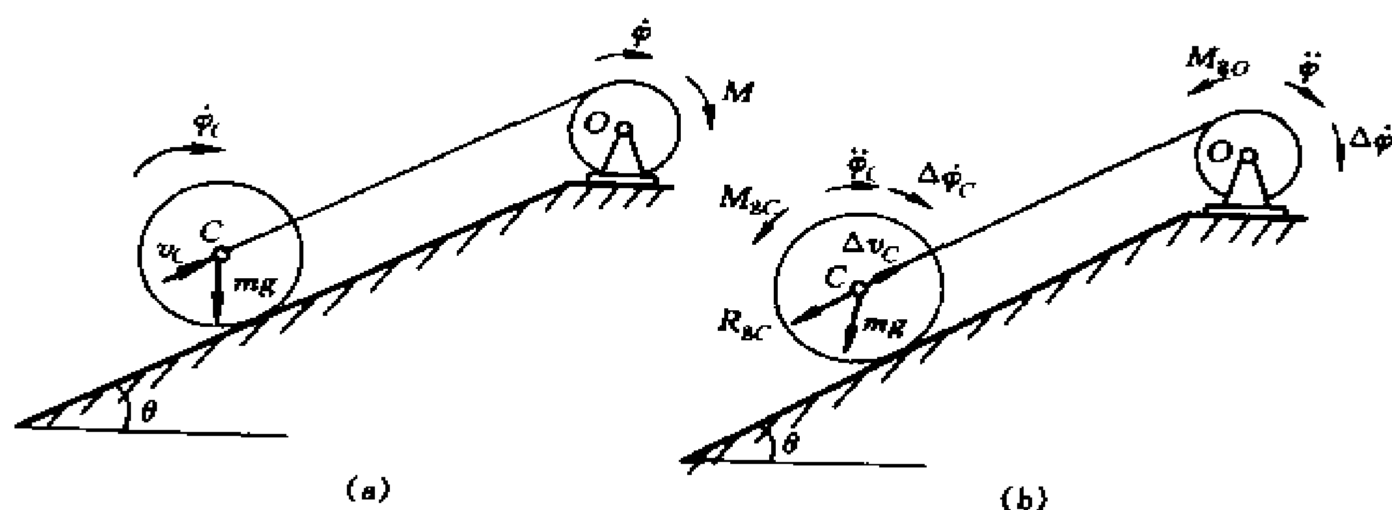


图 3-2-1

解：这是个单自由度的刚体系统，所有约束都是完整的理想约束，取绞车的转角 φ 为广义坐标。

（1）运动分析与虚速度

设在图示瞬时和位置上，绞车的角速度、角加速度为 $\dot{\varphi}$、φ，则圆轮中心 C 的速度和加速度、圆轮的角速度和角加速度如图 3－2－1（a）、（b）所示，它们的大小分别为

$$v_C = r\dot{\varphi}, \qquad a_C = r\varphi \tag{a}$$

$$\dot{\varphi}_C = \frac{v_C}{R} = \frac{r}{R}\dot{\varphi}, \qquad \varphi_C = \frac{r}{R}\varphi \tag{b}$$

虚速度则为

$$\Delta v_C = r\Delta\dot{\varphi}, \qquad \Delta\dot{\varphi}_C = \frac{r}{R}\Delta\dot{\varphi} \tag{c}$$

（2）受力分析

主动力有绞车上的常力矩 M，圆轮 C 上的重力 mg，所有的约束都是理想约束。因此，在图 3－2－1（b）没有把约束力画出来，至于绞车和圆盘的惯性力主矢、主矩的方向在图中都画成与对应的加速度、角加速度的方向相反，在计算它们的大小时，计算式中不须冠以负号了。即

$$R_{gO} = 0, \quad M_{gO} = J_O\varphi = m_O\rho^2\dot{\varphi} \tag{d}$$

$$R_{gC} = m_C a_C = m_C r\varphi \tag{e}$$

$$M_{gC} = J_C\dot{\varphi}_C = 0.5m_C Rr\dot{\varphi} \tag{f}$$

（3）虚功率、虚功率方程

由式（c）～式（f）可以计算绞车、圆轮在图示位置的虚功率，即

$$\Delta P_O = (M - m_O\rho^2\dot{\varphi})\Delta\dot{\varphi} \tag{g}$$

$$\Delta P_C = (-m_O g\sin\theta - R_{gC})\Delta v_C + (-M_{gC})\Delta\dot{\varphi}_C$$

$$\therefore \quad \Delta P_C = -(m_C gr\sin\theta + 1.5m_C r^2\dot{\varphi})\Delta\dot{\varphi} \tag{h}$$

将式（g）和式（h）代入式（3.2.1），有

$$\sum_{i=1}^{2}\Delta P_i = 0, \quad [(M - m_O\rho^2\varphi) - (m_C gr\sin\theta + 1.5m_C r^2\dot{\varphi})]\Delta\dot{\varphi} = 0$$

$$\therefore \quad \dot{\varphi} = \frac{M - m_C gr\sin\theta}{m_O\rho^2 + 1.5m_C r^2} \qquad \text{（顺时针）}$$

将上式代入式（a），得

$$a_C = r\varphi = \frac{r(M - m_C g r \sin\theta)}{m_O\rho^2 + 1.5 m_C r^2}$$

3.2.2 用动量和冲量表述的动力学方程

在虚功率形式的动力学方程式(3.2.1)的基础上，稍加变换，可以导出用动量和冲量(或用动量矩和冲量矩)表述的动力学方程。

3.2.2.1 一般情形

将虚功率形式的动力学方程式(3.2.1)中的括号部分取出来，乘以 $\mathrm{d}t$，在 t 至 $t+\tau$ 区间内积分，即

$$\int_t^{t+\tau} (\boldsymbol{F}_i - m_i\boldsymbol{a}_i)\mathrm{d}t = \int_t^{t+\tau} \boldsymbol{F}_i \mathrm{d}t - \int_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{u}} \mathrm{d}(m_i \boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{S}_i - m_i(\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{v}_i)$$

其中

$$\boldsymbol{S}_i = \int_t^{t+\tau} \boldsymbol{F}_i \mathrm{d}t \tag{3.2.4}$$

是作用于第 i 个质点上的主动碰撞力的冲量。虚速度 $\Delta\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 改用 $\Delta\boldsymbol{u}_i$ 表示，式(3.2.1)可改写为

$$\sum_{i=1}^{n} [\boldsymbol{S}_i - m_i(\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{v}_i)]\cdot\Delta\boldsymbol{u}_i = 0 \tag{3.2.5}$$

这是用动量和冲量表述的动力学方程，可用于碰撞问题。在碰撞中，一般的主动碰撞力都很大，作用的时间 τ 很小，仅为千分之几秒(毫秒的量级)，在这样短的时间里，质点系各质点的位置可以认为没有变动，即位移为零，但其速度的变化却不为零，是有限量的变化。这是在碰撞问题中用虚速度 $\Delta\boldsymbol{u}_i$ 比用虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_i$ 优越的地方。

在虚速度应满足的约束方程式(1.4.16)中，系数 $\boldsymbol{\Psi}_{\beta i}$ 是时间和位形坐标的函数，在碰撞问题中，时间变更 τ 很小，在时间 t 变至 $t+\tau$ 这段时间间隔中，将系数 $\boldsymbol{\Psi}_{\beta i}$ 视为瞬时 t 的矢量，不会带来明显的误差。这样，在碰撞过程中，系数 $\boldsymbol{\Psi}_{\beta i}$ 可视为常量。

3.2.2.2 转动的情形

设某质点系绕固定点 O 转动，虚速度 $\Delta\dot{\boldsymbol{r}}$ 与虚角速度 $\Delta\boldsymbol{\omega}$ 有如下关系

$$\Delta\dot{\boldsymbol{r}} = \Delta\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i \tag{3.2.6}$$

代入式（3.2.1）得

$$\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F}_i - m_i\boldsymbol{a}_i)\cdot(\Delta\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i) = 0 \tag{A}$$

应用矢量混合积的运算规则

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$

式(A)中矢量混合积可以改写为

$$(\boldsymbol{F}_i - m_i\boldsymbol{a}_i)\cdot(\Delta\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i) = \Delta\boldsymbol{\omega}\cdot[\boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{F}_i - m_i\boldsymbol{a}_i)] \tag{B}$$

由式(2.5.7)知

$$\boldsymbol{r}_i \times (-m_i\boldsymbol{a}_i) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L}_{Oi} \tag{C}$$

又

$$\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_i) \tag{D}$$

将式(B)～式(D)代入式(A)，得

$$\sum_{i=1}^{n} [\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_i) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L}_{Oi}]\cdot\Delta\boldsymbol{\omega} = 0 \tag{3.2.7}$$

仿照一般情形的做法，将式(3.2.7)中的括号部分取出来，乘以 $\mathrm{d}t$，在时间 t 至 $t+\tau$ 区间内积分，将碰撞冲量 $\boldsymbol{S}_i$ 对固定点 O 之矩称为冲量矩，用 $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{S}_i)$ 表示，即

$$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{S}_i) = \int_t^{t+\tau} \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_i)\mathrm{d}t \tag{3.2.8}$$

那么，式(3.2.7)可以改写为

$$\sum_{i=1}^{n} [\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{S}_i) - (\boldsymbol{L}_{Oi} - \boldsymbol{l}_{Oi})]\cdot\Delta\boldsymbol{\omega} = 0 \tag{3.2.9}$$

式中的 $\boldsymbol{l}_{Oi}$、$\boldsymbol{L}_{Oi}$ 为碰撞前、后第 i 个质点对定点 O 的动量矩，这是用动量矩和冲量矩表述的动力学方程。

如果某质点是相对其质心 C 的转动，同样也可以导出类似于式(3.2.9)的动力学方程，只须将式(3.2.9)中的下标“O”改写为下标“C”，即

$$\sum_{i=1}^{n} [(\boldsymbol{m}_C(\boldsymbol{S}_i) - (\boldsymbol{L}_{Ci} - \boldsymbol{l}_{Ci})]\cdot\Delta\boldsymbol{\omega} = 0 \tag{3.2.10}$$

式中$\boldsymbol{l}_{C_i}$、$\boldsymbol{L}_{C_i}$分别为碰撞前、后第i个质点对其质心C的动量矩，$\boldsymbol{m}_C(\boldsymbol{S}_i)$则是碰撞冲量$\boldsymbol{S}_i$对质心的冲量矩。

如果质点系是绕定轴转动的刚体系或绕通过各自质心某轴转动的刚体系，式（3.2.9）和式（3.2.10）可以改写为

$$\sum_{i=1}^{n}[m_z(\boldsymbol{S}_i)-J_z(\omega'_i-\omega_i)]\cdot\Delta\omega'=0 \tag{3.2.11}$$

$$\sum_{i=1}^{n}[m_{Cz}(\boldsymbol{S}_i)-J_{Cz}(\omega'_i-\omega_i)]\cdot\Delta\omega'=0 \tag{3.2.12}$$

式中J_z、J_{Cz}为第i个刚体绕z轴、绕通过质心C的z轴的转动惯量，ω_i、ω'_i为此刚体碰撞前、后的角速度。

3.2.2.3 平面运动的情形

设某刚体系作平面运动，可以将式(3.2.1)中的求和项分成两部分来化简。一部分为各刚体随同各自质心C_i的平动，推导出类似于式(3.2.5)的结果；另一部分为各刚体相对其质心C_i的转动，推导出式（3.2.12）的结果，即有

$$\sum_{i=1}^{n}[(\boldsymbol{S}_i-m_i(\boldsymbol{u}_{C_i}-\boldsymbol{v}_{C_i})]\cdot\Delta\boldsymbol{u}_{C_i}+$$
$$[m_{Cz}(\boldsymbol{S}_i)-J_{Cz}(\omega'_i-\omega_i)]\cdot\Delta\omega'_i=0 \tag{3.2.13}$$

式中$\boldsymbol{v}_{C_i}$、$\boldsymbol{u}_{C_i}$为碰撞前、后第i个刚体质心C_i的速度，$\Delta\boldsymbol{\omega}'_i$及$\Delta\boldsymbol{u}_{Ci}$则为给定的瞬时和位形上第$i$个刚体的虚角速度、其质心$C_i$的虚速度。

例3-3 图3-2-2(a)中，质量为m、边长为b的正方块以速度$\boldsymbol{v}_1$平移下落，其角A与凸缘B相撞，假设角A与凸缘B之间的碰撞是完全弹性碰撞，求此方块碰撞后的角速度和质心C的速度。

解：这是一个平面运动自由刚体的碰撞问题，有三个自由度，选质心C的坐标x_C、y_C及相对质心C的转角φ为广义坐标。

（1）应用恢复系数计算方块角A碰撞后的速度

已知方块角A碰撞前的速度

$$v_{Ax}=0,\qquad v_{Ay}=-v_1 \tag{a}$$

如图3-2-2（b）所示，凸缘B碰撞前、后的速度均为零，即

$$v_{Bx} = v_{By} = u_{Bx} = u_{By} = 0 \tag{b}$$

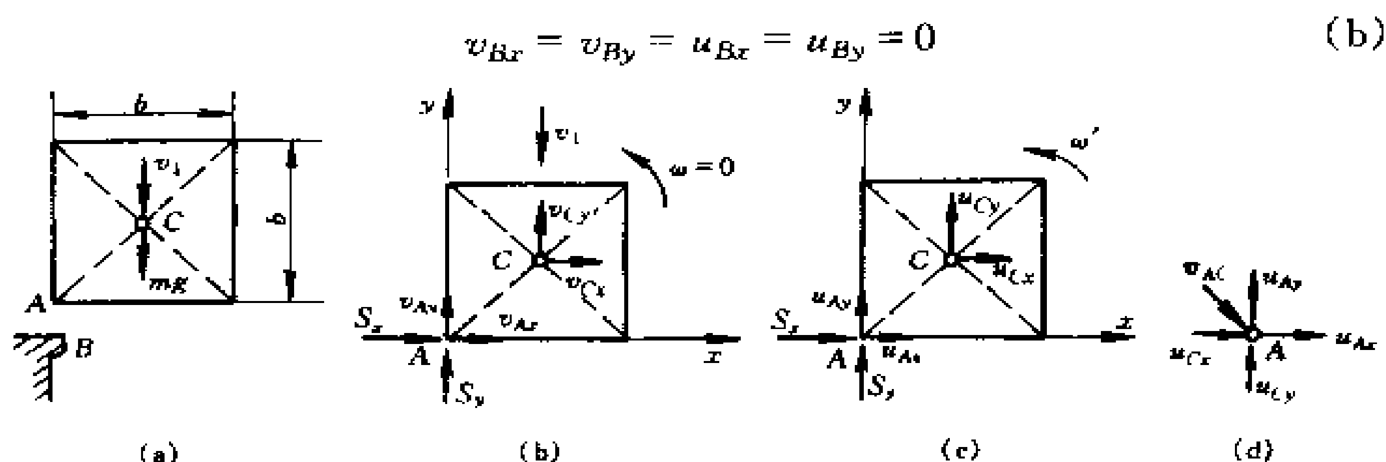


图 3-2-2

将式 (a) 和式 (b) 及 $k_x = k_y = 1$ 代入恢复系数公式

$$k_x = \frac{u_{Bx} - u_{Ax}}{v_{Ax} - v_{Bx}}, \qquad k_y = \frac{u_{By} - u_{Ay}}{v_{Ay} - v_{By}}$$

解得

$$u_{Ax} = 0, \qquad u_{Ay} = v_1 \quad (\text{向上}) \tag{c}$$

(2) 运动分析

正方块在碰撞前是平行移动，其质心 C 的速度及绕 C 转动的角速度

$$u_{Cx} = 0, \quad u_{Cy} = -v_1, \quad \omega = 0 \tag{d}$$

碰撞后是平面运动。设其质心 C 的速度及绕 C 转动的角速度为 u_{Cx}、u_{Cy}及 ω'，如图 3-2-2(c)所示。以质心 C 为基点，计算角 A 的速度，如图 3-2-2(d)所示，有

$$\left.\begin{aligned} u_{Ax} &= u_{Cx} + v_{AC}\sin45^\circ \\ u_{Ay} &= u_{Cy} - v_{AC}\cos45^\circ \end{aligned}\right\} \tag{e}$$

其中

$$v_{AC} = 0.5\sqrt{2}\, b\omega' \tag{f}$$

将式(c)和式(f)代入式(e)，解得

$$u_{Cx} = -0.5b\omega' \qquad u_{Cy} = v_1 + 0.5b\omega' \tag{g}$$

式(g)对 ω'求一阶等时变分，得虚角速度 $\Delta\omega'$及质心 C 的虚速度

$$\Delta u_{Cx} = -0.5b\Delta\omega', \qquad \Delta u_{Cy} = +0.5b\Delta\omega' \tag{h}$$

(3) 受力分析

在碰撞过程中，方块的重力是非碰撞力，可忽略不计，方块角 A 承受碰撞力，它所对应的碰撞冲量 S_x、S_y 如图(c)所示。

(4) 建立碰撞过程的动力学方程

本例题为一个刚体的平面运动，式(3.2.13)可简写为

$$[S_x - m(u_{Cx} - v_{Cx})]\Delta u_{Cx} + [S_y - m(u_{Cy} - v_{Cy})]\Delta u_{Cy}$$
$$+ [m_C(S_i) - J_C(\omega' - \omega)]\Delta\omega' = 0$$

将式(d)、式(g)、式(h)及 $J_C = \frac{1}{6}mb^2$ 代入上式，得

$$[S_x - m(-\frac{1}{2}b\omega' - 0)](-\frac{1}{2}b\Delta\omega') + \{S_y - m[v_1 + \frac{1}{2}b\omega'$$
$$-(-v_1)]\} \times \frac{1}{2}b\Delta\omega' + \left[\frac{1}{2}b(S_x - S_y) - \frac{1}{6}mb^2\omega'\right]\Delta\omega' = 0$$

即

$$(-\frac{4}{3}b\omega' - 2v_1) \times \frac{1}{2}mb\Delta\omega' = 0$$

由

$$-\frac{4}{3}b\omega' - 2v_1 = 0$$

解得

$$\omega' = -\frac{3v_1}{2b} \qquad \text{(顺时针)}$$

代入式 (g)，解得

$$u_{Cx} = \frac{3}{4}v_1 \qquad \text{(向右)}$$

$$u_{Cy} = \frac{1}{4}v_1 \qquad \text{(向上)}$$

3.3 高斯形式的动力学方程

为了导出高斯形式的动力学方程，先介绍虚加速度的概念。

3.3.1 虚加速度

3.3.1.1 加速度的约束方程

假设某质点系由 n 个质点组成，内有 d 个完整约束，g 个非完整约束，这些约束可以表述为统一的线性一阶微分约束方程的矢量形式(式(1.1.20))和坐标分解形式(式(1.1.21))。为方便起见，这里选用坐标分解形式，并将各质点的坐标采用统一的符号，于是式(1.1.21)可以改写为

$$\sum_{r=1}^{3n} A_{\beta r}\mathrm{d}x_r + A_\beta \mathrm{d}t = 0 \quad (\beta = 1,2,\cdots,d+g) \tag{3.3.1}$$

式中的系数 $A_{\beta r}$、A_β 都是时间 t 和各质点位形坐标 x_r 的函数。等号两侧同时除以 $\mathrm{d}t$，得

$$\sum_{r=1}^{3n} A_{\beta r}\dot{x}_r + A_\beta = 0 \quad (\beta = 1,2,\cdots,d+g) \tag{3.3.2}$$

这些约束方程不仅限制各质点在给定瞬时和位形上的微小位移和速度，而且对各质点的加速度也有相应的限制。为了了解对于加速度的具体限制形式，将式(3.3.2)对时间求一阶全导数，即

$$\sum_{r=1}^{3n}\left[A_{\beta r}\ddot{x}_r + \left(\sum_{s=1}^{3n}\frac{\partial A_{\beta r}}{\partial x_s}\dot{x}_s + \frac{\partial A_{\beta r}}{\partial t}\right)\dot{x}_r\right] + \left(\sum_{s=1}^{3n}\frac{\partial A_\beta}{\partial x_s}\dot{x}_s + \frac{\partial A_\beta}{\partial t}\right) = 0$$

即

$$\sum_{r=1}^{3n} A_{\beta r}\ddot{x}_r + \sum_{r=1}^{3n}\sum_{s=1}^{3n}\frac{\partial A_{\beta r}}{\partial x_s}\dot{x}_s\dot{x}_r + \sum_{r=1}^{3n}\frac{\partial A_{\beta r}}{\partial t}\dot{x}_r + \sum_{s=1}^{3n}\frac{\partial A_\beta}{\partial x_s}\dot{x}_s + \frac{\partial A_\beta}{\partial t} = 0$$

$$(\beta = 1,2,\cdots,d+g) \tag{3.3.3}$$

这是质点系的加速度约束方程。

3.3.1.2 实加速度

质点系在其真实的运动中，在给定的瞬时和位形上，各质点的加速度称为**实加速度**，用 $\ddot{\boldsymbol{r}}_r$ 或 $\ddot{x}_r$ 表示。实加速度既要满足此质点系的运动微分方程和运动的初始条件，又要满足此质点系的加速度约束方程式(3.3.3)。

3.3.1.3 可能加速度

质点系在其可能的运动中，在给定的瞬时和位形上，各质点的加

速度称为**可能加速度**，用 $\ddot{\boldsymbol{r}}_i^*$ 或 $\ddot{x}_r^*$ 表示。可能加速度要满足此质点系的加速度的约束方程，此方程与式(3.3.3)类同，只需将式中的加速度、速度改为可能加速度、可能速度即可，即

$$\sum_{r=1}^{3n} A_{\beta r}\ddot{x}_r^* + \sum_{r=1}^{3n}\sum_{s=1}^{3n}\frac{\partial A_{\beta r}}{\partial x_s}\dot{x}_s^*\dot{x}_r^* + \sum_{r=1}^{3n}\frac{\partial A_{\beta r}}{\partial t}\dot{x}_r^* + \sum_{s=1}^{3n}\frac{\partial A_\beta}{\partial x_s}\dot{x}_s^* + \frac{\partial A_\beta}{\partial t}=0$$

$$(\beta=1,2,\cdots,d+g) \qquad (3.3.4)$$

由于这种约束方程的方程数目恒少于加速度分量的数目，因此，该质点系的可能加速度有很多组。

3.3.1.4 虚加速度

从同一瞬时、同一状态(包括位形和速度)出发，给出质点系相邻任意两组可能加速度 $\ddot{x}_r^*$、$\ddot{x}_r^{**}$。$\ddot{x}_r^*$ 应满足的约束方程为式(3.3.4)，$\ddot{x}_r^{**}$ 则为

$$\sum_{r=1}^{3n} A_{\beta r}\ddot{x}_r^{**} + \sum_{r=1}^{3n}\sum_{s=1}^{3n}\frac{\partial A_{\beta r}}{\partial x_s}\dot{x}_s^*\dot{x}_r^* + \sum_{r=1}^{3n}\frac{\partial A_{\beta r}}{\partial t}\dot{x}_r^* + \sum_{s=1}^{3n}\frac{\partial A_\beta}{\partial x_s}\dot{x}_s^* + \frac{\partial A_\beta}{\partial t}=0$$

$$(\beta=1,2,\cdots,d+g) \qquad (\mathrm{A})$$

在式(3.3.4)和式(A)中，由于二者的时间、各质点的位置和速度均相同，它们对应项的系数相同，于是二式之差

$$\sum_{r=1}^{3n} A_{\beta r}(\ddot{x}_r^* - \ddot{x}_r^{**})=0$$

或

$$\sum_{r=1}^{3n} A_{\beta r}\Delta\ddot{x}_r=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,d+g) \qquad (3.3.5)$$

其中

$$\Delta\ddot{x}_r=\ddot{x}_r^*-\ddot{x}_r^{**} \qquad (3.3.6)$$

称为此质点系第 r 个坐标所对应的虚加速度分量($r=1,2,\cdots,3n$)。如果 $\Delta\ddot{x}_r$ 是第 i 个质点的虚加速度 $\Delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ 在 x 坐标上的分量($r=1,2,\cdots,3n$)，则有

$$\Delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\Delta\ddot{x}_r\boldsymbol{i}+\Delta\ddot{x}_{r+1}\boldsymbol{j}+\Delta\ddot{x}_{r+2}\boldsymbol{k} \qquad (3.3.7)$$

以上诸式中的“Δ”代表有限变更，表明虚加速度可以是有限量。至此，可以给虚加速度一个比较完整的定义：在同一瞬时，质点系中的

各质点从同一状态出发的可能加速度的变更，称为该质点系的**虚加速度**，也称为**高斯**（Gauss）**变更**。

式（3.3.5）是虚加速度分量 $\Delta\ddot{x}_r$ 的约束方程，由此可以写出与之对应的虚加速度 $\Delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ 的约束方程

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Psi}_{\beta i}\cdot\Delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i = 0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,d+g) \tag{3.3.8}$$

比较质点系的虚加速度约束方程式(3.3.8)、虚位移约束方程式(1.4.9)、虚速度约束方程式(1.4.16)可以看出，它们有相同的形式，只要把式(1.4.9)中的虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_i$、式(1.4.16)中的虚速度 $\Delta\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 改为虚加速度 $\Delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i$，就是虚加速度约束方程。

与虚位移、虚速度作一比较，虚加速度有如下性质：①质点系各质点的虚加速度是非时间参量引起的，可以视为质点系在给定的瞬时和位形上，将时间和约束“凝固”后，各质点保持原有的位置和速度(即状态)时，各质点为约束所允许的加速度；②比较式(3.3.5)和式(3.3.4)可看出，在一般情况下，质点系各质点的虚加速度不能视为可能发生却尚未发生的可能加速度；③以沿非定常约束曲面运动的质点为例，在给定瞬时将时间和约束“凝固”后，此质点不再有牵连运动、相对运动的速度保持不变，在此状态下，质点在可能运动中的牵连加速度、科氏加速度和相对的法向加速度或为零，或保持不变，因此，质点的虚加速度也就是此质点相对于被“凝固”的约束曲面的切向加速度的变更。这表明，与虚位移、虚速度一样，虚加速度位于被“凝固”的约束曲面在此质点所在位置的切平面内，如果被“凝固”的约束曲面在质点所在位置处的单位法向矢量用 $\boldsymbol{n}$ 表示，则有

$$\boldsymbol{n}\cdot\Delta\ddot{\boldsymbol{r}} = 0 \tag{3.3.9}$$

3.3.2 高斯形式的动力学方程

假设某质点系由 n 个质点组成，内有 d 个完整约束、g 个非完整约束，按照 3.2.1 推导虚功率形式的动力学方程的方法，可以得到下述方程

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{N}_i+\boldsymbol{F}_{gi})\cdot\Delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i=0 \tag{B}$$

由式(3.3.9)知，质点系各质点的虚加速度与被“凝固”约束曲面的法向垂直（在切平面内），就是说各质点的虚加速度 $\Delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ 是垂直于各自质点所受的约束力 $\boldsymbol{N}_i$，于是

$$\sum\boldsymbol{N}_i\cdot\Delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i=0 \tag{3.3.10}$$

将式(3.3.10)代入式(B)，得

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i-m_i\boldsymbol{a}_i)\cdot\Delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i=0 \tag{3.3.11}$$

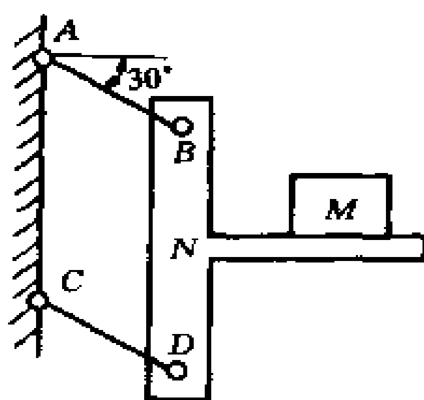
这是**高斯形式的动力学方程**。它是高斯(Gauss C. F.)于 1829 年导出的。

比较式(3.1.1)、式(3.2.1)和式(3.3.11)可以看出，在一阶线性约束的情况下，动力学方程的三种基本形式除了元素符号的区别以外，是完全一致的。

高斯形式的动力学方程的明显优点是，可以用它导出高斯原理和阿沛尔方程，这里不再举例说明。

习 题

3-1 平台 N 由等长而且平行的均质杆 AB、CD 支持，如题 3-1 图所示。平台上有一方块 M，设 AB、CD、M 及 N 的质量相等。试求从图示位置开始运动时 M 的加速度。M 与 N 之间没有相对滑动。

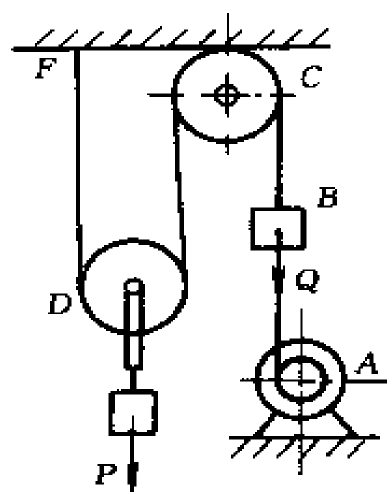


题 3-1 图

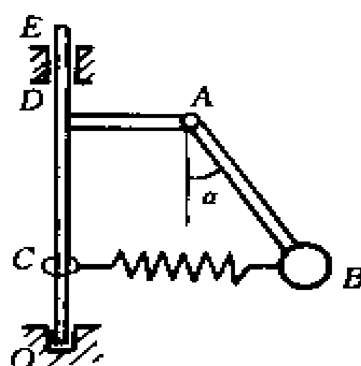
3-2 在题 3-1 中如果不计各部分的摩擦，试求从图示位置开始运动时 M 的加速度。

3-3 两重物 $P=20$ kN，$Q=8$ kN，连接如题 3-3 图所示，并由电动机 A 拖动。如电动机转子所带动的绳的张力为 3 kN，不计滑轮重，试求重物 P 的加速度和绳 FD 的张力。

3-4 长度为 b 的 AD 杆以角速度 ω 绕铅直轴 OE 匀速转动。另一长度为 l 的 AB 杆用铰链与 AD 杆连结，它的 B 端固结一个重量为 P 的小球，球与弹簧 BC 相连，弹簧的 C 端系一光滑圆环，能沿 OE 轴滑动（题 3－4 图）。已知弹簧的劲度系数为 k，且当 $\alpha=0$ 时，弹簧无变形，AD 杆、AB 杆和圆环的质量均可忽略不计，试求角速度 ω 与 AB 杆对铅直线的偏角 α 之间的关系。

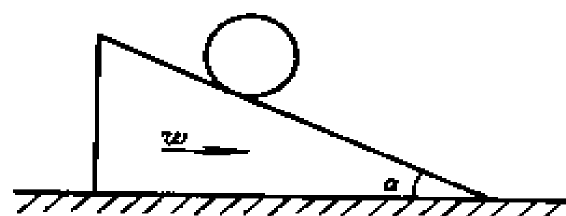


题 3－3 图

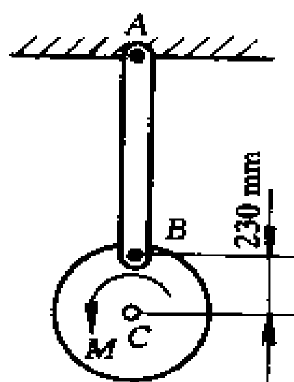


题 3－4 图

3-5 半径为 r 的薄壁圆管沿棱柱体的斜面无滑动地滚动。此柱体又以匀加速度 a 沿水平面平动，如题 3－5 图所示。已知斜面与水平面的倾角为 α，不计滚动摩擦，试求：(1) 圆管的角加速度；(2) 圆管与棱柱体斜面之间的滑动摩擦系数的最小值；(3) 圆管向上运动的条件。



题 3－5 图

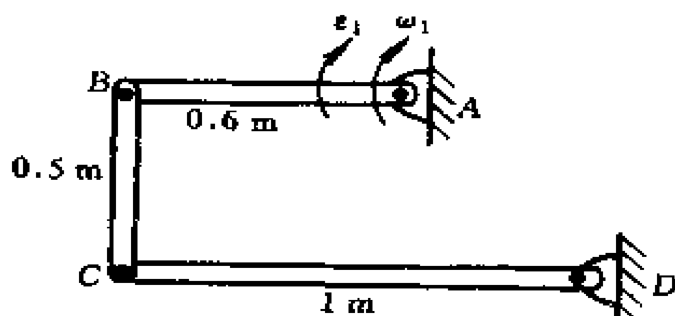


题 3－6 图

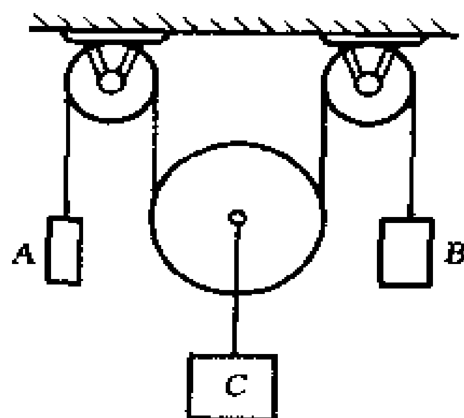
3－6 均质杆 AB 长 1 m，质量为 10 kg，一端铰接于固定点 A，另一端铰接于直径为 0.5 m、质量为 20 kg 的均质薄圆盘的 B 点。B 与圆盘中心 C 相距 0.23 m。若在圆盘上施加力偶 $M = 15\ \text{N·m}$，试求此瞬时杆 AB 和圆盘的角加速度（题 3－6 图）。

3－7 在铅直平面内运动的四连杆机构中，均质杆 AB、BC 和 CD 的质量分别为 4 kg、3 kg 和 6 kg。在题 3－7 图所示瞬时，主动杆 AB 的角速度和角加速度分别为 $\omega_1 = 2\ \text{rad/s}$，$\varepsilon_1 = 3\ \text{rad/s}^2$，试求此时支座 D 的约束力。

3－8 题 3－8 图所示滑轮系统中，动滑轮上悬挂重量为 40 N 的物块 C，绳子两端分别跨过定滑轮后，悬挂重量为 20 N 的物块 A 和重量为 30 N 的物块 B。绳和滑轮的重量以及摩擦均可不计，试求此三物块的加速度。



题 3－7 图

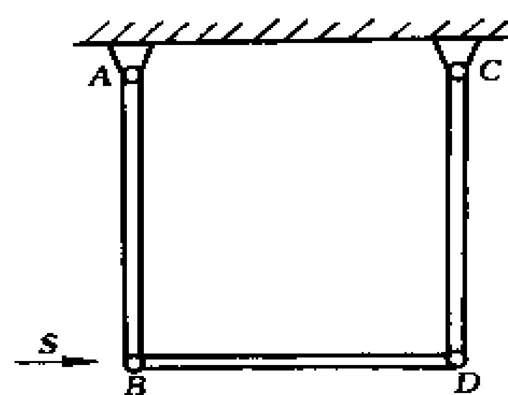


题 3－8 图

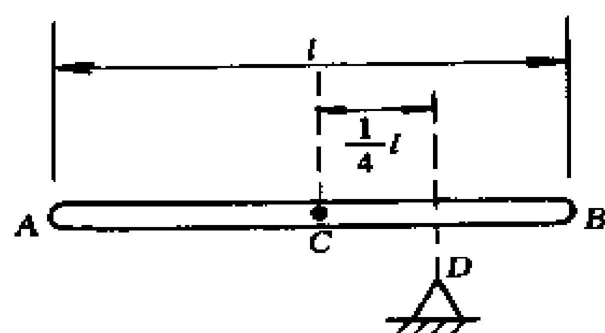
3－9 平行四连杆机构 $ABCD$ 由三根相同的均质杆组成，杆的质量和长度分别用 m 和 l 表示。在题 3－9 图所示静止状态下，有一水平冲量 S 作用于铰链 B 上，试求此时各杆的角速度。

3－10 在上题中，水平冲量 S 应作用在 AB 杆上何处时，支座 A 的碰撞冲量等于零？并求此时支座 C 的碰撞冲量。

3－11 长为 l 的均质杆 AB 水平地落到支点 D 上，如题 3－11 图所示。设杆在碰撞前的速度为 v，杆与支点之间的恢复系数为 0.5。求：(1) 碰撞后此杆的角速度及其质心的速度；(2) 杆所受的碰撞冲量；(3) 碰撞时动能的损失。



题 3－9 图



题 3－11 图

第二篇　力学的变分原理

力学中的基本原理，是指力学中最基本最普遍的规律，它是在人类反复实践与深入认识自然界客观规律的过程中建立起来的。原理本身是不需要数学推证的，它的正确性可通过由它推导出的定理和方程对某一自然现象的预测与实际观测的比较来得到证实。从这一点来说它与基本定律是相同的。一般来说，原理所揭示出来事物的本质联系往往要比基本定律更为深刻，更为普遍。对一门学科来说，原理具有高度概括性，学科中的所有定理及方程都可以由它推演出来，因此它对一门学科的所有命题起到了统一的作用。可以说一门学科的系统性与严密性，及其对客观世界反映的深入程度，可从该学科的基本原理的普遍性与概括深度来说明。

力学原理从数学表达的形式上，可以分为不变分原理和变分原理两大类，每类又可以分为微分形式和积分形式两种。

不变分原理是反映系统真实运动的普遍规律。如果原理本身只说明某一瞬时系统的运动规律，称为**微分原理**。例如，牛顿第二定律、达朗伯原理就是属于微分原理。如果原理能够说明一有限的运动过程，则称为**积分原理**。例如，能量守恒定律。

变分原理则不同，它只是提供一种准则，根据这种准则，可以把系统的真实运动与约束所允许的一切可能运动区别开来，从而可以找到系统的真实运动。如果准则是对于某一瞬时而言的，则称为**微分形式的变分原理**。如果准则是对于一有限过程而言的，则称为**积分形式的变分原理**。例如，动力学普遍方程和高斯最小拘束原理都是微分形式的变分原理；哈密顿原理是积分形式的变分原理。但有的变分原理，既具有微分形式又具有积分形式，例如，赫兹最小曲率原理。

第4章　高斯最小拘束原理

4.1　高斯最小拘束原理

1829年数学家高斯导出了**最小拘束原理**：在理想约束条件下，系统在某瞬时，真实运动与位置、速度、约束条件均相同，但加速度不同的可能运动相比较，其真实运动应使“拘束”Z取极小值，即

$$\delta Z = 0 \tag{4.1.1}$$

高斯将系统的拘束定义为

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left(\boldsymbol{a}_i - \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i}\right)^2 \tag{4.1.2}$$

式中m_i为系统中质点的质量，$\boldsymbol{F}_i$和$\boldsymbol{a}_i$分别为作用在质点上的主动力和质点加速度。

证：设$\ddot{\boldsymbol{r}}_i$是真实运动的加速度，$\ddot{\boldsymbol{r}}_i + \delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i$是约束容许下可能加速度，则“拘束”的变化为

$$\begin{aligned}
\Delta Z &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i} \{[\boldsymbol{F}_i - m_i(\ddot{\boldsymbol{r}}_i + \delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i)] \cdot [\boldsymbol{F}_i - m_i(\ddot{\boldsymbol{r}}_i + \delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i)] - \\
&\quad (\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i) \cdot (\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i} \{[(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i) - m_i\delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i)] \cdot [(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i) - m_i\delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i)] - \\
&\quad (\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i) \cdot (\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i} \{ m_i^2(\delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i) \cdot (\delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i) - 2m_i(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i) \cdot \delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i\}
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \Delta Z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i(\delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i) \cdot (\delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i) - \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i) \cdot \delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i$$

但最后一项由高斯形式的动力学方程可知恒等于零，因此，当$\delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i \neq 0$时，有

$$\Delta Z=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i(\delta\ddot{r}_i)^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i(\delta a_i)^2>0 \qquad (4.1.3)$$

上式表明约束容许下的可能运动与真实运动之差总是取正值，即真实运动使“拘束”取极小值。值得指出的是，在高斯原理中的可能运动是通过改变瞬时 t 的加速度得到的。至于瞬时 t 的坐标及速度则被认为是不变的。这种特殊条件下的变分称为**高斯加速度变分**。

4.2 拘束的物理意义

高斯最小拘束原理中的拘束的物理意义可以作如下解释。

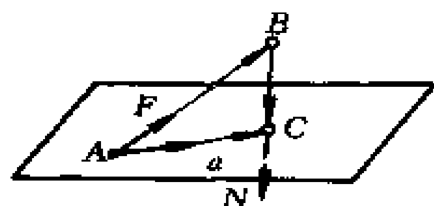


图 4－2－1

设一质量为 m 的质点在某一瞬时 t 位于 A 点，速度为 $\boldsymbol{v}$，主动力为 $\boldsymbol{F}$，约束力为 $\boldsymbol{N}$。假想质点作不受约束的自由运动，其加速度只由主动力 $\boldsymbol{F}$ 单独引起。经一微小时间间隔 Δt，质点从 A 运动到 B，如图 4－2－1 所示，则有

$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{v}\,\Delta t+\frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{F}}{m}\right)(\Delta t)^2 \qquad (4.2.1)$$

当有约束存在时，在主动力 $\boldsymbol{F}$ 和约束力 $\boldsymbol{N}$ 共同作用下，引起质点的加速度为 $\boldsymbol{a}$，经过 Δt 时间，质点沿约束曲面的切平面从 A 运动到 C，如图 4－2－1 所示，有

$$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{v}\,\Delta t+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}(\Delta t)^2 \qquad (4.2.2)$$

将式(4.2.1)和式(4.2.2)相减，计算质点的实际运动与假想的自由运动的位移偏差，得到

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{a}-\frac{\boldsymbol{F}}{m}\right)(\Delta t)^2 \qquad (4.2.3)$$

显然这一偏离是由于约束引起的，上式中的$\left(\boldsymbol{a}-\frac{\boldsymbol{F}}{m}\right)$可以看作是约束对质点运动施加约束作用的度量。高斯定义质点系的“拘束”为

$$Z=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\left(\boldsymbol{a}_i-\frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i}\right)^2$$

将上式与式(4.2.3)比较，可知($\boldsymbol{a}_i - \dfrac{\boldsymbol{F}_i}{m_i}$)项是约束作用大小的度量，取其平方即为模的大小，并用质点质量加权。由此“拘束”的物理意义可理解为是系统运动偏离自由运动的度量，也是约束作用大小的度量。

例 4－1　应用高斯最小拘束原理推导单摆的运动微分方程。

解：设摆长为 l，质点的质量为 m（图 4－2－2），质点的拘束为

$$
\begin{aligned}
Z &= \frac{1}{2}m\left(\boldsymbol{a} - \frac{m\boldsymbol{g}}{m}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}m(l\ddot{\theta}\boldsymbol{\tau} + l\dot{\theta}^2\boldsymbol{n} - \boldsymbol{g})^2 \\
&= \frac{m}{2}[l\ddot{\theta}\boldsymbol{\tau} + l\dot{\theta}^2\boldsymbol{n} + g\sin\theta\boldsymbol{\tau} + g\cos\theta\boldsymbol{n}]^2 \\
&= \frac{m}{2}[(l\ddot{\theta} + g\sin\theta)\boldsymbol{\tau} + (l\dot{\theta}^2 + g\cos\theta)\boldsymbol{n}]^2
\end{aligned}
$$

$$
Z = \frac{m}{2}[(l\ddot{\theta} + g\sin\theta)^2 + (l\dot{\theta}^2 + g\cos\theta)^2]
$$

对拘束 Z 取变分并令其为零，注意到变分为高斯变分，于是

$$
Z = \frac{m}{2}(l^2\ddot{\theta}^2 + 2lg\sin\theta\ddot{\theta} + \text{与 } \ddot{\theta} \text{ 无关的项})
$$

$$
\delta Z = \frac{m}{2}(2l^2\ddot{\theta} + 2lg\sin\theta)\delta\ddot{\theta}
$$

根据高斯最小拘束原理，令 $\delta Z = 0$，得到单摆的运动微分方程

$$
\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0
$$

例 4－2　试用高斯最小拘束原理推导刚体绕定轴转动微分方程。（图 4－2－3）

解：设刚体上任一质点的质量为 m_i，其与转轴之距为 $\boldsymbol{r}_i$，加速度

$$
\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)
$$

其中

$$
\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{r}_i = x_i\boldsymbol{i} + y_i\boldsymbol{j} + z_i\boldsymbol{k}
$$

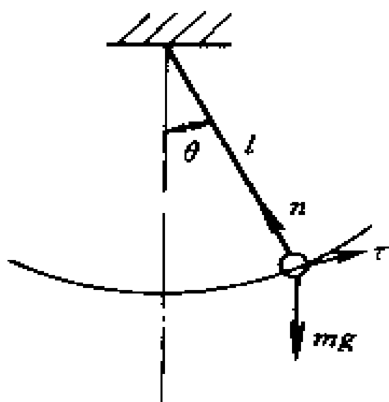


图 4-2-2

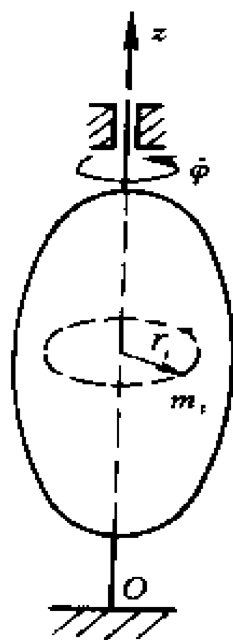


图 4-2-3

$$
\begin{aligned}
Z &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left(\boldsymbol{a}_i - \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i}\right) \cdot \left(\boldsymbol{a}_i - \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left[\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i) - \frac{1}{m_i}\boldsymbol{F}_i\right] \cdot \left[\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i) - \frac{1}{m_i}\boldsymbol{F}_i\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_i) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_i) + \sum_{i=1}^{n} m_i (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_i) \cdot [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)] \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{F}_i - \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i) \cdot \boldsymbol{F}_i \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)] \cdot [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)] + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2 m_i} \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{F}_i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad Z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_i) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_i) + \sum_{i=1}^{n} m_i (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_i) \cdot [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)] \\
- \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_i) \cdot \boldsymbol{F}_i + (\text{与 } \boldsymbol{\varepsilon} \text{ 无关的项}) \qquad \text{(a)}
\end{aligned}
$$

式(a)等号右侧的第一、二、三项分别可化简为

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_i) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_i) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i [\varphi \boldsymbol{k} \times (x_i \boldsymbol{i} + y_i \boldsymbol{j} + z_i \boldsymbol{k})] \cdot [\varphi \boldsymbol{k} \times (x_i \boldsymbol{i} + y_i \boldsymbol{j} + z_i \boldsymbol{k})]
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \varphi^2 (x_i \boldsymbol{j} - y_i \boldsymbol{i}) \cdot (x_i \boldsymbol{j} - y_i \boldsymbol{i})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \varphi^2 (x_i^2 + y_i^2)$$

$$\therefore \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{\varphi} \times \boldsymbol{r}_i) \cdot (\varphi \times \boldsymbol{r}_i) = \frac{1}{2} J_z \varphi^2 \tag{b}$$

由矢量混合积的关系

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \tag{c}$$

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{c} (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \tag{d}$$

则

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_i) \cdot [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_i) \cdot [\boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}_i) - \boldsymbol{r}_i (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \omega z_i - \boldsymbol{r}_i \omega^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i [\omega z_i \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_i) - \omega^2 \boldsymbol{r}_i \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_i)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i [\omega z_i \boldsymbol{r}_i \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varepsilon}) - \omega^2 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{r}_i)]$$

$$\because \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varepsilon} = 0, \quad \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{r}_i = 0$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} m_i (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_i) \cdot [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)] = 0 \tag{e}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_i) \cdot \boldsymbol{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i) = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$$

$$= \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m}_0 (\boldsymbol{F}_i)$$

$$= \varphi \boldsymbol{k} \cdot [\sum_{i=1}^{n} m_x (\boldsymbol{F}_i) \boldsymbol{i} + \sum_{i=1}^{n} m_y (\boldsymbol{F}_i) \boldsymbol{j} + \sum_{i=1}^{n} m_z (\boldsymbol{F}_i) \boldsymbol{k}]$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_i) \cdot \boldsymbol{F}_i = \varphi \sum_{i=1}^{n} m_z (\boldsymbol{F}_i) \tag{f}$$

将式(b)、式(e)和式(f)代入式(a)，得

$$Z=\frac{1}{2}J_z\varphi^2+0-\varphi\sum_{i=1}^{n}m_z(\boldsymbol{F}_i)+(\text{与 }\varphi\text{ 无关的项})$$

$$\therefore\quad \delta Z=J_z\varphi-\sum_{i=1}^{n}m_z(\boldsymbol{F}_i)$$

根据高斯定理，$\delta Z=0$，于是得到刚体绕定轴转动的微分方程

$$J_z\varphi=\sum_{i=1}^{n}m_z(\boldsymbol{F}_i)$$

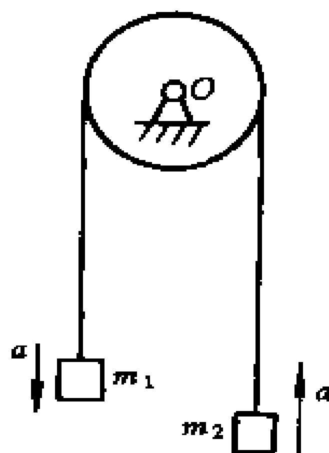
习　　题

4－1　试证明作平面运动刚体的拘束为

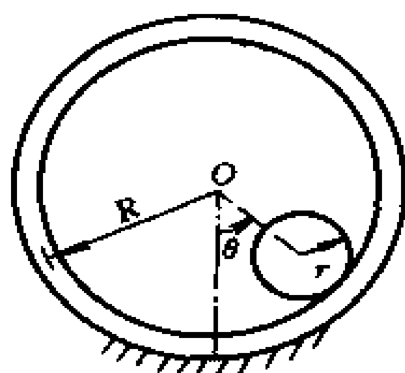
$$Z=\frac{1}{2}ma_C^2+\frac{1}{2}J_C\varepsilon^2-\boldsymbol{a}_C\cdot\boldsymbol{F}-\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{M}_C+\cdots$$

其中 m 为刚体的质量，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 和 $\boldsymbol{a}_C$ 分别为刚体的角加速度和质心加速度，$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{M}_C$ 分别为作用于刚体的主动力主矢和向质心简化的主矩，省略号表示与加速度无关的项。

4－2　如题 4－2 图所示，质量分别为 m_1 和 m_2（设 $m_1>m_2$）两物块用一不可伸长的柔绳连结，柔绳跨在不计质量的定滑轮上，滑轮与轴承 O 之间的摩擦可以忽略，试用高斯原理求两物块的加速度。



题 4－2 图



题 4－3 图

4－3　一半径为 r 的小圆柱体，在半径为 R 的固定大圆柱筒内无滑动地滚动，如题 4－3 图所示。试用高斯原理求运动微分方程以及圆柱质心切向加速度。

第 5 章　哈密顿原理

5.1　哈密顿原理

哈密顿原理是著名的力学积分原理之一。哈密顿原理给出了从所有可能运动中找出真实运动的一个准则。下面从动力学方程的第一种基本形式——动力学普遍方程出发，来推导哈密顿原理。

动力学普遍方程

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0 \tag{5.1.1}$$

实际上是属于微分的变分原理。它指出，在真实运动的每一瞬时，作用在力学系统上的主动力及惯性力在任何虚位移中的元功之和为零，这是一个较普遍的变分原理，对完整系统与非完整系统都成立。

将式（5.1.1）改写成

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = \delta W \tag{5.1.2}$$

为了进一步分析上式中 $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i$ 项，计算 $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i$ 对时间 t 的导数，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i + \sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\boldsymbol{r}_i)$$

互换运算 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ 和 δ，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i + \sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}}_i$$

因而有

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i\right) - \sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}}_i \tag{5.1.3}$$

式(5.1.3)中的最后一项可进一步变换。对系统的动能表达式

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i$$

作变分运算，

$$\delta T=\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \dot{\boldsymbol{r}}_i$$

有

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i\right)-\delta T$$

根据式(5.1.2)，上式可写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i\right)=\delta T+\delta W$$

将上式在由 t_0 到 t_1 的时间间隔内对时间进行积分，可得

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1}=\int_{t_0}^{t_1}(\delta T+\delta W)\mathrm{d}t \tag{5.1.4}$$

通常，这个方程对虚位移有

$$\delta \boldsymbol{r}_i(t_0)=\delta \boldsymbol{r}_i(t_1)=0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{5.1.5}$$

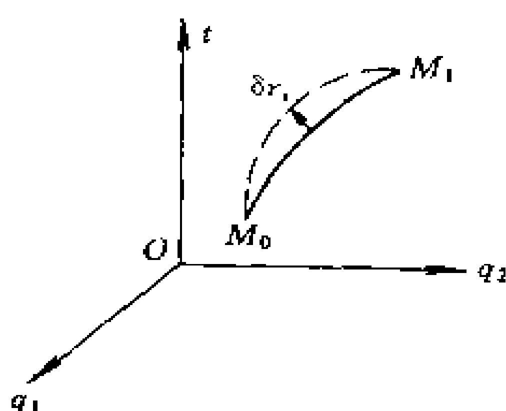


图 5－1－1

满足以上条件的方程其意义可表述为：所有满足约束条件的可能运动，在瞬时 t_0 都经过增广位形空间的 M_0 点，在瞬时 t_1 都经过增广位形空间的 M_1 点。所有满足 t_0 及 t_1 两个固定瞬时所对应的两个固定位形的条件下，可能运动在位形空间中的轨迹称为旁路，如图 5－1－1 中虚线所示，而将真实运动在位形空间中的轨迹称为正路，如图 5－1－1 中实线所示。满足以上端点条件的旁路有无限多条，而正路只有一条。旁路只满足约束的几何条件，而正路除满足约束的几何条件外，还要满足动力学的基本定律。因此，式(5.1.4)在式(5.1.5)条件下成为

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T+\delta W)\mathrm{d}t=0 \tag{5.1.6}$$

这就是**哈密顿原理**的一般形式。它表明，所有满足端点条件式(5.1.5)的旁路中，正路应使式(5.1.6)成立。即对于真实运动，系统动能的变分 δT 和作用于系统的所有主动力的虚功 δW 之和在任一时间间隔内对时间的积分等于零。应该指出，哈密顿原理的一般形式不是变分原理，该式在一般情况下也不是功的变分，采用变分符号只是一种形式。

当作用在系统上主动力为有势时，$\delta W = -\delta V$，代入式(5.1.6)得

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta(T - V)\mathrm{d}t = 0$$

哈密顿原理的这一形式常用所谓的**拉格朗日函数**

$$L = T - V$$

来表达。即

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L \mathrm{d}t = 0 \tag{5.1.7}$$

式(5.1.7)仍不是变分原理。对于完整系统来说，变分符号和积分符号可以互换，因而有

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L \mathrm{d}t = \delta \int_{t_0}^{t_1} L \mathrm{d}t$$

但对非完整系统

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L \mathrm{d}t \neq \delta \int_{t_0}^{t_1} L \mathrm{d}t$$

现引入哈密顿作用量

$$I = \int_{t_0}^{t_1} L \mathrm{d}t$$

于是，对完整系统哈密顿原理可以写成常见的变分形式

$$\delta I = \delta \int_{t_0}^{t_1} L \mathrm{d}t = 0 \tag{5.1.8}$$

所以式(5.1.8)的含义是：一完整系统受有势力作用，在任一时间间隔内的真实运动与在同一时间内具有同一端点条件的可能运动相比

较，真实运动的哈密顿作用量取驻值。即哈密顿作用量 I 的变分等于零。

例 5－1 一质点，仅受到重力作用，被约束在一光滑曲面上运动。试写出在此情况下质点的哈密顿原理表示式。

解： 设 z 轴垂直向上为正。该质点具有动能

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$$

重力是有势力，势能为

$$V=mgz$$

曲面是完整约束，即

$$z=f(x,y)$$

于是，可应用式(5.1.8)。因为

$$\dot{z}=\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}$$

所以哈密顿原理在此例中的具体的表达形式是

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\frac{m}{2}\left\{\left[\dot{x}^2+\dot{y}^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}\right)^2\right]-2gf(x,y)\right\}\mathrm{d}t=0$$

例 5－2 设一具有单位质量的质点受到一有势力作用，该力可由势函数导出，并设该质点受到的约束使其轨迹的斜率与时间 t 成正比，即 $t\dot{x}-\dot{y}=0$，试写出该质点的哈密顿原理表示式。

解： $t\dot{x}-\dot{y}=0$ 是不可积分的运动约束，该质点受一非完整约束。因此，应用式(5.1.7)形式的哈密顿原理。

动能为

$$T=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$$

所以

$$\delta T=\dot{x}\delta\dot{x}+\dot{y}\delta\dot{y}$$

又

$$\delta V=\frac{\partial V}{\partial x}\delta x+\frac{\partial V}{\partial y}\delta y=\left(\frac{\partial V}{\partial x}+t\,\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta x$$

于是

$$\delta L = \dot{x}\delta\dot{x} + \dot{y}\delta\dot{y} - (\frac{\partial V}{\partial x} + t\,\frac{\partial V}{\partial y})\delta x$$

其中已经应用了约束方程。因此，哈密顿积分式为

$$\int_{t_0}^{t_1} [\dot{x}\delta\dot{x} + \dot{y}\delta\dot{y} - (\frac{\partial V}{\partial x} + t\,\frac{\partial V}{\partial y})\delta x]\mathrm{d}t = 0$$

δy、$\delta\dot{y}$ 和 $\dot{y}$ 诸量可以用

$$\dot{y} = t\dot{x}, \quad \delta y = t\delta x, \quad \delta\dot{y} = \delta x + t\delta\dot{x}$$

来消去，其中第三式是由第二式求导数而得到的。代入哈密顿积分后，得

$$\int_{t_0}^{t_1} [(1 + t^2)\dot{x}\delta\dot{x} + (t\dot{x} - \frac{\partial V}{\partial x} - t\,\frac{\partial V}{\partial y})\delta x]\mathrm{d}t = 0$$

例 5－3 一平面摆，摆锤质量为 m_1，摆杆质量为 m_3，杆长为 l，视为均质直杆，挂于支点 O 处，可在铅垂平面内摆动。另一质量为 m_2 的小球，光滑地套在摆杆上，它既可以沿摆杆自由滑动，又可以沿半径为 R 的固定圆柱形槽内滑动，如图 5－1－2 所示。不计摩擦。试用哈密顿原理写出系统的运动微分方程。

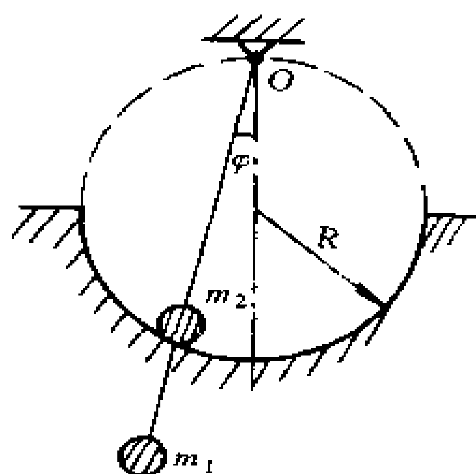


图 5－1－2

解： 系统具有一个自由度，选 φ 为广义坐标，系统的动能

$$T = \frac{1}{2}m_1 l^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}(\frac{1}{3}m_3 l^2)\dot{\varphi}^2$$

因

$$r = 2R\cos\varphi$$
$$\dot{r} = -2R\sin\varphi\dot{\varphi}$$

所以

$$T = \frac{1}{2}m_1 l^2\dot{\varphi}^2 + 2m_2 R^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{6}m_3 l^2\dot{\varphi}^2$$

取 O 点处为重力的零势能位置，系统的势能

$$V = \quad (m_1 gl\cos\varphi + 2m_2 gR\cos^2\varphi + \frac{1}{2}m_3 gl\cos\varphi)$$

拉氏函数

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}m_1 l^2\varphi^2 + 2m_2 R^2\varphi^2 + \frac{1}{6}m_3 l^2\varphi^2 \\ &\quad + (\frac{1}{2}m_3 gl\cos\varphi + m_1 gl\cos\varphi + 2m_2 gR\cos^2\varphi) \end{aligned}$$

由哈密顿原理，有

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L \mathrm{d}t = 0$$

$$\int_{t_0}^{t_1} [(\frac{1}{2}m_1 l^2 + 2m_2 R^2 + \frac{1}{6}m_3 l^2)2\dot{\varphi}\delta\varphi$$

$$-(\frac{1}{2}m_3 gl\sin\varphi + m_1 gl\sin\varphi + 2m_2 gR\sin 2\varphi)\delta\varphi]\mathrm{d}t = 0$$

因

$$\int_{t_0}^{t_1}\varphi\delta\dot{\varphi}\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1}\varphi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\varphi)\mathrm{d}t = \dot{\varphi}\delta\varphi\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\varphi\delta\varphi\mathrm{d}t$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1}\varphi\delta\varphi\mathrm{d}t$$

则有

$$\int_{t_0}^{t_1} -[(m_1 l^2 + 4m_2 R^2 + \frac{1}{3}m_3 l^2)\varphi$$

$$+(\frac{1}{2}m_3 gl\sin\varphi + m_1 gl\sin\varphi + 2m_2 gR\sin 2\varphi)]\delta\varphi\mathrm{d}t = 0$$

由于 $\delta\varphi$ 为独立变分，故得

$$(m_1 l^2 + 4m_2 R^2 + \frac{1}{3}m_3 l^2)\varphi + \frac{2m_1 + m_3}{2}gl\sin\varphi + 2m_2 gR\sin 2\varphi = 0$$

这就是所求系统运动微分方程。

例 5－4 设一圆轮在水平面内绕固定中心轴 O 转动，一质量为 m 的滑块套在轮的轮辐上，用弹簧与轴心相连，如图 5－1－3 所示。若轮对 O 的转动惯量为 J_O，弹簧的劲度系数为 k，其自然长度为 l，各处摩擦均不计。试用哈密顿原理求系统的运动微分方程。

解： 系统具有两个自由度，选圆轮转角 φ 和滑块坐标 x 为广义坐标。

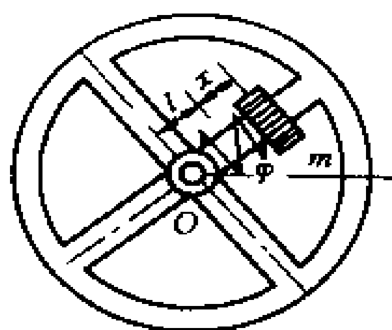


图 5－1－3

系统动能

$$T=\frac{1}{2}J_O\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m[\dot{x}^2+(l+x)^2\dot{\varphi}^2]$$
$$=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}[J_O+m(l+x)^2]\dot{\varphi}^2$$

系统势能

$$V=\frac{1}{2}kx^2$$

拉氏函数

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}[J_O+m(l+x)^2]\dot{\varphi}^2-\frac{1}{2}kx^2$$

由哈密顿原理，对于系统的真实运动，应有

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta L\mathrm{d}t=0$$

故得

$$\int_{t_0}^{t_1}\{m\dot{x}\delta\dot{x}+[J_O+m(l+x)^2]\dot{\varphi}\delta\dot{\varphi}+$$
$$m(l+x)\dot{\varphi}^2\delta x-kx\delta x\}\mathrm{d}t=0 \qquad \text{(a)}$$

因 $\delta\dot{x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x$，故

$$\int_{t_0}^{t_1}m\dot{x}\delta\dot{x}\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}m\dot{x}\mathrm{d}\delta x=m\dot{x}\delta x\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}mx\delta x\mathrm{d}t$$

考虑到

$$\delta x|_{t_0}=\delta x|_{t_1}=0$$

则

$$\int_{t_0}^{t_1}m\dot{x}\delta\dot{x}\mathrm{d}t=-\int_{t_0}^{t_1}mx\delta x\mathrm{d}t \qquad \text{(b)}$$

同样

$$\int_{t_0}^{t_1}[J_O+m(l+x)^2]\dot{\varphi}\delta\dot{\varphi}\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}[J_O+m(l+x)^2]\dot{\varphi}\mathrm{d}\delta\varphi$$

$$=[J_O+m(l+x)^2]\dot{\varphi}\delta\varphi\Big|_{t_0}^{t_1}$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\delta\varphi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[J_O\dot{\varphi}+m(l+x)^2\dot{\varphi}]\mathrm{d}t$$

$$=-\int_{t_0}^{t_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[J_O\dot{\varphi}+m(l+x)^2\dot{\varphi}]\delta\varphi\mathrm{d}t \tag{c}$$

将式(b)和式(c)代入式(a)后得

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[J_O\dot{\varphi}+m(l+x)^2\dot{\varphi}]\delta\varphi\mathrm{d}t+$$

$$\int_{t_0}^{t_1}[mx-m(l+x)\dot{\varphi}^2+kx]\delta x\mathrm{d}t=0$$

由于 $\delta\varphi$、δx 为独立变分，均不为零，欲上式成立，只有它们前面的函数为零，于是得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[J_O\dot{\varphi}+m(l+x)^2\dot{\varphi}]=0\\&mx-m(l+x)\dot{\varphi}^2+kx=0\end{aligned} \tag{d}$$

这就是所求系统的运动微分方程。

5.2 哈密顿原理在连续体动力学中的应用

在上节中，推出了哈密顿原理的一般形式，即

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T+\delta W)\mathrm{d}t=0 \tag{5.2.1}$$

以及对于完整系统有

$$\delta I=\delta\int_{t_0}^{t_1}L\mathrm{d}t=0 \tag{5.2.2}$$

从哈密顿原理的表达式中可以看到，原理中只涉及到两个整体性的动力学量，即系统的动能和功(或势能)，对于系统的几何特性并没有给出任何限制。也就是说，哈密顿原理不仅适用于有限多个质点的离散系统，而且也适用于无限多“质点”的连续系统。

现在来研究任意的三维线弹性动力学问题。假设弹性体是各向同性的，为方便起见，用x_i($i=1,2,3$)表示直角坐标x、y、z。在某瞬时

t，弹性体的位形可由位形函数 $u_1(x_1,x_2,x_3,t)$、$u_2(x_1,x_2,x_3,t)$、$u_3(x_1,x_2,x_3,t)$来表示，或用矩阵表示为

$$\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)^{\mathrm{T}} \tag{5.2.3}$$

其中，$u_i(i=1,2,3)$是物体内任一点的位移在x、y、z 轴上的投影，$\boldsymbol{u}$ 称为位移矢量。弹性体的六个应变分量和三个位移分量之间满足变形协调关系，即

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad (i,j=1,2,3) \tag{5.2.4}$$

由 6 个应变分量 ε_{ij}组成的矢量称为应变量，即

$$\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{33},2\varepsilon_{12},2\varepsilon_{23},2\varepsilon_{31})$$

则方程(5.2.4)可用矩阵表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}) \tag{5.2.5}$$

其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{5.2.6}$$

由 6 个应力分量 σ_{ij}组成的向量称为应力矢量，即

$$\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_{11},\ \sigma_{22},\ \sigma_{33},\ \sigma_{12},\ \sigma_{23},\ \sigma_{31})^{\mathrm{T}} \tag{5.2.7}$$

则应力应变关系可用如下矩阵方程表示为

$$\boldsymbol{\sigma}=E\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{5.2.8}$$

其中 E 为弹性模量,矩阵$\boldsymbol{\mu}$ 为

$$\boldsymbol{\mu}=\frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}\times\begin{bmatrix} 1-\nu & & & & & \\ \nu & 1-\nu & & & & \\ \nu & \nu & 1-\nu & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

式中 ν 为泊松系数，

设弹性体的密度为 ρ，则系统的动能可表示为

$$T = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \rho \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{u}} \mathrm{d}v \tag{5.2.9}$$

其中 $\dot{\boldsymbol{u}}$ 表示向量 $\boldsymbol{u}$ 对 t 的偏导数，

$$\dot{\boldsymbol{u}} = (\frac{\partial u_1}{\partial t}, \frac{\partial u_2}{\partial t}, \frac{\partial u_3}{\partial t})^{\mathrm{T}}$$

弹性体的势能

$$V = \iiint_{\tau} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varepsilon} \mathrm{d}v - \iiint_{\tau} \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u} \mathrm{d}v - \iint_{\Sigma} \overline{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u} \mathrm{d}s \tag{5.2.10}$$

其中第一项为弹性体的形变势能，后二项分别为外部的保守体积力 $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)^{\mathrm{T}}$ 及在边界上的保守表面力 $\overline{\boldsymbol{p}} = (\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{p}_3)^{\mathrm{T}}$ 做的功。

将式(5.2.5)和式(5.2.8)代入上式，于是，势能表达式可写成

$$V = \iiint_{\tau} \frac{1}{2} \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{u} \mathrm{d}v - \iiint_{\tau} \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u} \mathrm{d}v - \iint_{\Sigma} \overline{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u} \mathrm{d}s \tag{5.2.11}$$

其中矩阵

$$\boldsymbol{A} = E \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}$$

根据哈密顿原理，系统的真实运动应满足如下方程：

$$\delta I = \delta \int_{t_0}^{t_1} L \mathrm{d}t = 0$$

将系统的动能和势能代入上式，则得哈密顿原理应用于连续系统的表达式为

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \iiint_{\tau} [\frac{1}{2} \rho \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{u}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u}] \mathrm{d}v + \iint_{\Sigma} \overline{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u} \mathrm{d}s \right\} \mathrm{d}t = 0$$

上式同时需满足边界条件和时间边值条件，即

$$\left. \begin{array}{c} \boldsymbol{u}\big|_{t=t_0} = \boldsymbol{u}_0 \\ \boldsymbol{u}\big|_{\Sigma_1} = \overline{\boldsymbol{u}}, \qquad \\ \boldsymbol{u}\big|_{t=t_1} = \boldsymbol{u}_1 \end{array} \right\}$$

其中，$\boldsymbol{u}_0$ 及 $\boldsymbol{u}_1$ 分别表示 t_0 及 t_1 时刻弹性体的位移场。

例 5-5 用哈密顿原理求如图 5-2-1 所示非线性弹性系统自由振动的基本方程。

如图 5-2-1 所示的质量密度为 m 的均质梁，一端为铰支承，另一端用劲度系数为 k_0 的弹簧及质量为 M 的重块相连。重块可在水平方向自由滑动。

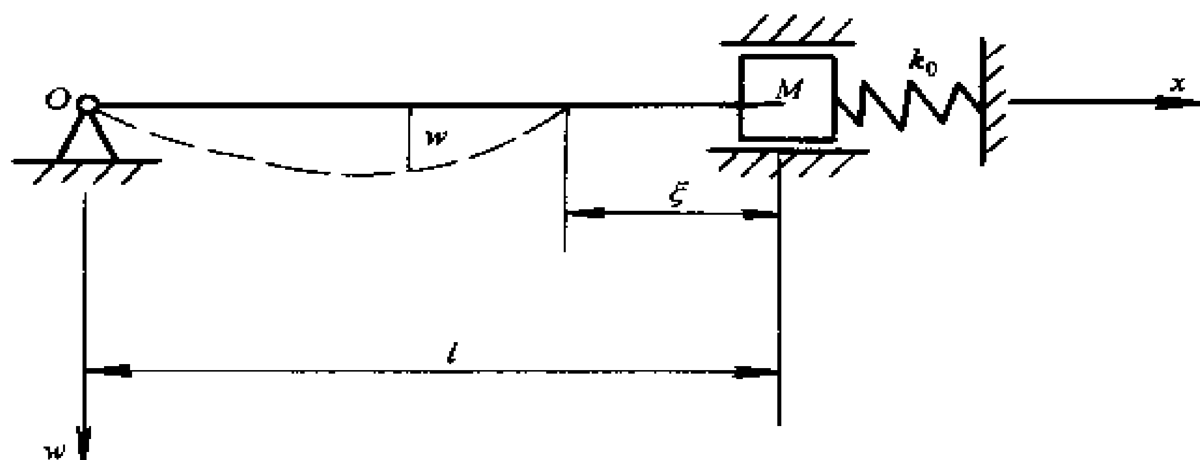


图 5-2-1

解： 这个问题的非线性包含两方面。首先是几何非线性。由于重块和弹簧相连结，弹簧的势能涉及到重块的位移，亦即涉及梁的端点的水平位移。设这位移为 ξ，则有

$$\xi = l - \int_0^l \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+w'^2}} \approx \frac{1}{2}\int_0^l w'^2 \mathrm{d}x \tag{a}$$

其次是材料的非线性。假设应力与应变之间的非线性关系为

$$\sigma = E(\varepsilon - \beta\varepsilon^3) \tag{b}$$

其中 E 为弹性模量，β 为常数。由式(a)可列出动能表达式为

$$T = \frac{m}{2}\int_0^l (\dot{w})^2 \mathrm{d}x + \frac{M}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l \frac{w'^2}{2}\mathrm{d}x\right)^2 \tag{c}$$

由式(a)及式(b)可列出势能表达式为

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\int_{\xi} \sigma\varepsilon \mathrm{d}\xi + \frac{k_0}{2}\left(\int_0^l \frac{w'^2}{2}\mathrm{d}x\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\int_0^l\int_A E(\varepsilon - \beta\varepsilon^3)\varepsilon \mathrm{d}A\mathrm{d}x + \frac{k_0}{8}\left(\int_0^l w'^2 \mathrm{d}x\right)^2 \end{aligned}$$

由梁的平面截面假设，即 $\varepsilon \approx y w''$，上式可化为

$$V=\frac{1}{2}\int_0^l\int_A\left[Ey^2(w'')^2-E\beta y^4(w'')^4\right]\mathrm{d}A\mathrm{d}x+\frac{k_0}{8}\left(\int_0^l w'^2\mathrm{d}x\right)^2$$

令 $I_1=\int_A y^2\mathrm{d}A$，$I_2=\beta\int_A y^4\mathrm{d}A$，则上式可化为

$$V=\frac{EI_1}{2}\int_0^l(w'')^2\mathrm{d}x-\frac{EI_2}{2}\int_0^l(w'')^4\mathrm{d}x+\frac{k_0}{8}\left(\int_0^l w'^2\mathrm{d}x\right)^2 \tag{d}$$

哈密顿作用量的变分为

$$I=\delta\int_{t_0}^{t_1}(T-V)\mathrm{d}t$$

为方便起见，以下分别求与 T 及 V 有关项的变分。

$$\begin{aligned}
\delta\int_{t_0}^{t_1}T\mathrm{d}t &=\delta\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\frac{m}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\delta\int_{t_0}^{t_1}\frac{M}{2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\frac{w'^2}{2}\mathrm{d}x\right]^2\mathrm{d}t\\
&=m\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\delta w}{\partial t}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\frac{M}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l w'^2\mathrm{d}x\right)\\
&\quad\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l w'\delta w'\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t\\
&=m\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\delta w\right)-\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\quad+\frac{M}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l w'^2\mathrm{d}x\right)\int_0^l w'^2\delta w'\mathrm{d}x\right.\\
&\quad\left.-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^l w'^2\mathrm{d}x\int_0^l w'\delta w'\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t\\
&=m\int_0^l\left[\frac{\partial w}{\partial t}\delta w\right]_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}x-m\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\quad+\frac{M}{2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l w'^2\mathrm{d}x\int_0^l w'\delta w'\mathrm{d}x\right]_{t_0}^{t_1}\\
&\quad-\frac{M}{2}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^l w'^2\mathrm{d}x\left\{\left[w'\delta w\right]_0^l-\int_0^l w''\delta w\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

利用几何边界条件 $w(0,t)=w(l,t)=0$ 及时间边值条件 $\delta w(x,t_0)$

$=\delta w(x,t_1)=0$，可将上式简化为

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} T\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\left[-m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{M}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^l w'^2\mathrm{d}x\right\}w''\right]\delta w\mathrm{d}x\mathrm{d}t \quad (\mathrm{e})$$

又

$$\begin{aligned}-\delta\int_{t_0}^{t_1} V\mathrm{d}t &= -EI_1\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l w''\delta w''\mathrm{d}x\mathrm{d}t+2EI_2\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l w''^3\delta w''\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &\quad -\frac{k_0}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l w'^2\mathrm{d}x\int_0^l w'\delta w'\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &= -EI_1\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\left[\frac{\partial}{\partial x}(w''\delta w')-w'''\delta w'\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &\quad +2EI_2\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\left[\frac{\partial}{\partial x}(w''^3\delta w')-\frac{\partial}{\partial x}(w'')^3\delta w'\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &\quad -\frac{k_0}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l w'^2\mathrm{d}x\int_0^l\left[\frac{\partial}{\partial x}(w'\delta w)-w''\delta w\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\end{aligned}$$

同样，用几何边界条件可使上式右边三个积分的前一项消去而化为

$$\begin{aligned}-\delta\int_{t_0}^{t_1} V\mathrm{d}t &= -EI_1\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\left[-\frac{\partial}{\partial x}(w'''\delta w)+w''''\delta w\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &\quad +2EI_2\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}w''^3\delta w\right)\right.\\ &\quad \left.+\frac{\partial^2}{\partial x^2}(w'')^3\delta w\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &\quad +\frac{k_0}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l w'^2\mathrm{d}x\int_0^l w''\delta w\mathrm{d}x\mathrm{d}t\end{aligned}$$

再利用几何边界条件消去上式右边头两个积分的前一项，得

$$\begin{aligned}-\delta\int_{t_0}^{t_1} V\mathrm{d}t = -\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l&\left[EI_1 w''''-2EI_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(w'')^3\right.\\ &\left.-\frac{k_0}{2}\int_0^l w'^2\mathrm{d}x\cdot w''\right]\delta w\mathrm{d}x\mathrm{d}t \qquad (\mathrm{f})\end{aligned}$$

将式(e)和式(f)代入哈密顿原理中，便得到以下运动方程式：

$$EI_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-2EI_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^3$$

$$-\left[\frac{k_0}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x+\frac{M}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^l\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$$

习　　题

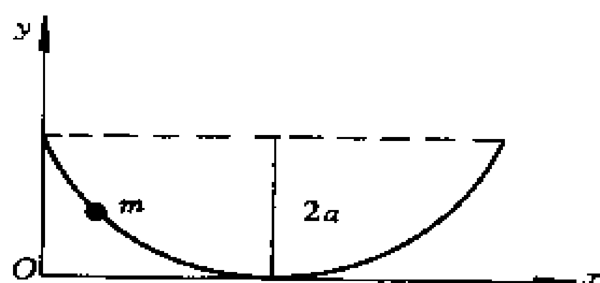
5－1　质点的动能 $T=m\dot{q}^2/2$，势能 $V=cq^2/2$（m、c 为常数，$m>0$，$c>0$），试建立哈密顿作用量 I 的表达式，并利用运动微分方程 $\ddot{q}+\omega^2q=0$（$\omega^2=c/m$）证明 $\delta I=0$。

5－2　设限制在直线轨道上运动的质点的位移为 x，受弹簧作用力 $-kx$、阻尼力 $-c\dot{x}$ 和随时间变化的外力 $F(t)$ 作用。试以质点为对象列出哈密顿原理。

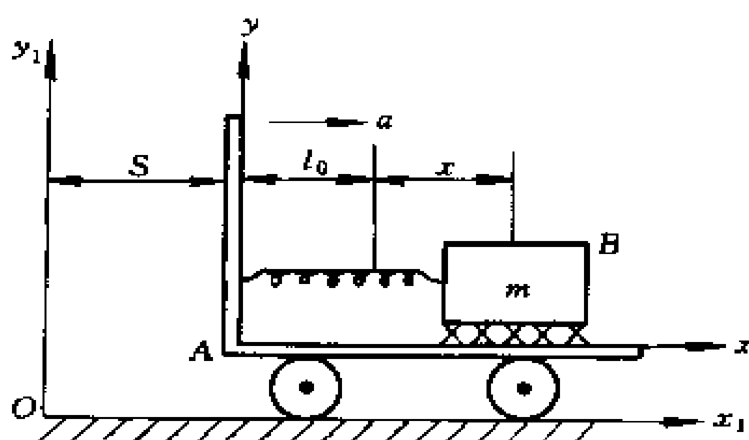
5－3　一质量为 m 的质点在一方程为

$$x=a(\theta-\sin\theta),\quad y=a(1+\cos\theta)$$

摆线形状的金属线上做无摩擦滑动，式中 a 为常数，$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$，如题 5－3 图所示。试用哈密顿原理求其运动微分方程。



题 5－3 图

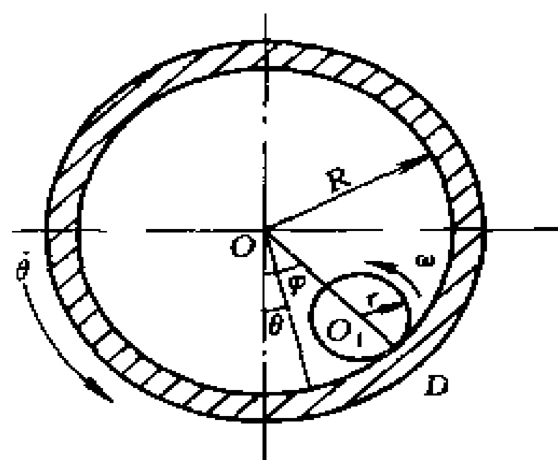


题 5－4 图

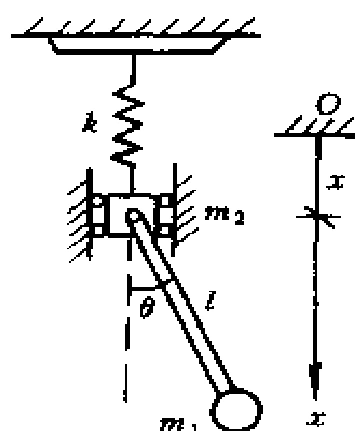
5－4　一劲度系数为 k 的弹簧，一端固连于一刚架 Axy 上，另一端和一质量为 m 的滑块 B 相连接，滑块 B 受到粘性阻尼力 $F=b\dot{x}$ 作用。已知刚架 Axy 相对地面作直线平动，其运动方程为 $S=v_0t+\frac{1}{2}at^2$，如题 5－4 图所示，试用哈密顿原理求滑块 B 的运动微分方程。

5－5　一粗糙圆柱体质量为 m，半径为 r，在一空心圆柱体内表

面上无滑动地滚动。这空心圆柱的质量是 M，半径是 R，能绕本身水平轴 O 转动。两圆柱对其自身轴的转动惯量分别为 MR^2 及 $mr^2/2$ 。试用哈密顿原理写出系统的运动方程。



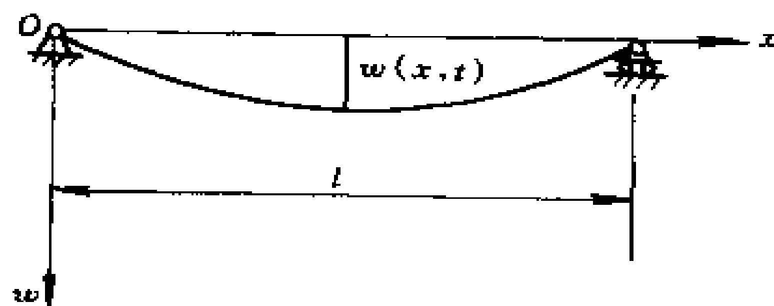
题 5－5 图



题 5－6 图

5－6 一单摆摆长为 l，质量为 m_1，悬挂在另一质量为 m_2 的滑块上，滑块又悬挂在劲度系数为 k 的弹簧上，并可沿铅垂方向的导轨上下振动，如题 5－6 图所示，试用哈密顿原理求系统的运动微分方程；又当考虑微幅摆动时，求其微分方程。

5－7 如题 5－7 图所示，试用哈密顿原理列出均质梁的运动微分方程。设 ρ 为梁的单位长度质量，EI 为梁的截面抗弯刚度。



题 5－7 图

第三篇　完整系统动力学

第6章　拉格朗日第二类方程

研究动力学的问题一般有两种途径，即矢量动力学和分析动力学。矢量动力学的基础是牛顿运动定律的直接应用，它的注意力集中在与系统的个别部分相联系的力和运动以及各部分之间的相互作用。而分析动力学则更多地把系统看作一个整体并且利用如动能、势能之类的纯量来描述函数。对它们进行某种运算，不必明显地解出作用于系统各部分的约束力，就能得到一个完全的运动方程组。拉格朗日第二类方程是从能量的观点出发，用变分法建立系统所服从的动力学规律，它给出了动力学问题一个普遍、简单而又统一的解法，是分析力学中最重要的动力学方程。

6.1　动能的广义坐标表达式

考虑一 n 个质点的系统，受 d 个理想完整的约束，取 k 个广义坐标 q_1，q_2，…，q_k（$k=3n-d$），则系统的位形可以用 k 个相互独立的广义坐标给定，即

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_1,q_2,\cdots,q_k,t) \tag{6.1.1}$$

这里假设这些函数对于 q_i 和 t 是二阶可微的。则可得

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \tag{6.1.2}$$

注意，$\boldsymbol{r}_i$ 对 $\dot{q}$ 是线性的，$\partial \boldsymbol{r}_i/\partial q_j$ 和 $\partial \boldsymbol{r}_i/\partial t$ 是 q_j（$j=1$，2，…，k）和 t 的函数。

系统的动能定义为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{r}_i^2 \tag{6.1.3}$$

将式(6.1.2)代入上式，有

$$\begin{aligned}
T&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\Big(\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}\Big)\cdot\Big(\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}\Big)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\sum_{j=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{k}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\mu}\dot{q}_\mu+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}\dot{q}_j\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{k}\Big(\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\mu}\Big)\dot{q}_j\dot{q}_\mu+\sum_{j=1}^{k}\Big(\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}\Big)\dot{q}_j\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}
\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
a_{j\mu}&=\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\mu}\\
b_j&=\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}\\
c&=\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}
\end{aligned} \tag{6.1.4}$$

显然，由于 $\boldsymbol{r}_i$ 是 q_j $(j=1,2,\cdots,k)$ 和 t 的函数，所以 $a_{j\mu}$、b_j 与 c 也是 q_j $(j=1,2,\cdots,k)$ 和 t 的函数。又设

$$\begin{aligned}
T_2&=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{k} a_{j\mu}\dot{q}_j\dot{q}_\mu\\
T_1&=\sum_{j=1}^{k} b_j\dot{q}_j\\
T_0&=\frac{1}{2}c
\end{aligned}$$

于是系统的动能可表示为

$$T=T_2+T_1+T_0 \tag{6.1.5}$$

式中 T_2、T_1 和 T_0 分别是广义速度的二次齐次函数、一次齐次函数及零次齐次函数。

根据式(6.1.4)可知，当$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}=0$时，即$\boldsymbol{r}_i$不显含时间$t$，则系统的约束是定常的，于是有

$$b_j=0,\quad c=0$$

所以

$$T=T_2=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{k}a_{j\mu}\dot{q}_j\dot{q}_\mu \tag{6.1.6}$$

即动能是广义速度的二次齐次函数。

由此可知，式(6.1.6)必须是正定的，因为它等于式(6.1.3)，于是式(6.1.5)的第一项是速度的正二次型。此外，根据式(6.1.4)中c的定义，式(6.1.5)中的第三项也必定是非负的，而且式(6.1.5)中所有三项之和也必定是非负的，因为它等于式(6.1.3)。所以，尽管对于某些q_j、$\dot{q}_j$（$j=1, 2, \cdots, k$）和t的值，$\sum_{j=1}^{k}b_j\dot{q}_j$可能是负的，但它绝不可能使$T$本身成为负的。

显然，用广义坐标表示的动能的一般表达式比用直角坐标表示的要复杂得多。这是应用非直角广义坐标所必须付出的代价。尽管如此，在分析力学中还是使用广义坐标。因为这样做有两点好处，一是可以将位形坐标的数目减到最少，而且最适用于所讨论的问题；二是用它建立的各种方程式有很大的一般性，适用于各种广义坐标，而无需事先规定要用哪一组特定的坐标。

例 6-1 质量为m的无约束的质点的动能用直角坐标表示为$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$。试应用变换关系

$$x=r\sin\theta\sin\varphi$$
$$y=r\sin\theta\cos\varphi$$
$$z=r\cos\theta$$

变换到用球坐标表示的质点的动能。

解：将以上三式分别对时间求导并将它们的平方相加，可得

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)$$

动能仅是速度的二次齐次函数，但第二项的系数是广义坐标 r 的函数，而第三项的系数是广义坐标 r 和 θ 的函数。

通过这个例子可以说明，式(6.1.6)一般包含所有速度的混合乘积，而式(6.1.3)只含速度的平方，更重要的是式(6.1.6)中系数 $a_{j\mu}$ 一般来说是 q_j 和 t 的函数，而式(6.1.3)中的 m_i 却是常数。

例 6－2 质量为 m 的质点 M，被约束在倾角为 α 的光滑斜面上运动，斜面自身又沿水平直线导轨以速度 v 作匀速平动，如图 6－1－1 所示，求用广义坐标表示系统的动能。

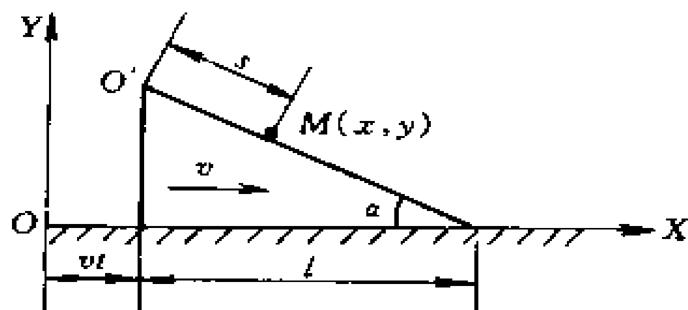


图 6－1－1

解：对质点 M，取 s 为广义坐标，则有

$$x = vt + s\cos\alpha$$

$$y = l\tan\alpha - s\sin\alpha$$

故质点动能

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m[(v + \dot{s}\cos\alpha)^2 + (\dot{s}\sin\alpha)^2]$$

$$= \frac{1}{2}m[\dot{s}^2 + (2v\cos\alpha)\dot{s} + v^2]$$

由此可见，当约束为非定常时，系统的动能是广义速度的二次齐次函数、一次齐次函数及零次齐次函数。即

$$T_2 = \frac{1}{2}m\dot{s}^2$$

$$T_1 = mv\cos\alpha\dot{s}$$

$$T_0 = \frac{1}{2}mv^2$$

6.2 拉格朗日第二类方程

哈密顿原理是分析力学的一个基本原理。作为基本原理则可由它通过逻辑推导、数学演绎等手段导出分析力学的基本定理和方程。为

此，下面用哈密顿原理推导拉格朗日第二类方程。

哈密顿原理的一般形式为

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T+\delta W)\mathrm{d}t=0 \tag{6.2.1}$$

由于 $T=T(q_j,\dot{q}_j,t)$，计算其变分则有

$$\delta T=\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\delta q_j+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta\dot{q}_j\right)$$

系统的所有主动力的虚功

$$\delta W=\sum_{j=1}^{k}Q_j\delta q_j$$

将 δT 和 δW 代入式(6.2.1)，得

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\delta q_j+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta\dot{q}_j+Q_j\delta q_j\right)\mathrm{d}t=0 \tag{6.2.2}$$

计算上式中的第二项，将等时变分与微分运算互换得

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta\dot{q}_j=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_j=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right)-\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)\right]\delta q_j \tag{6.2.3}$$

将式(6.2.3)代入式(6.2.2)得

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\Bigg|_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{\partial T}{\partial q_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)+Q_j\right]\delta q_j\mathrm{d}t=0$$

因为系统在始末位置是确定的，也就是说始末广义坐标的变分为零，即

$$\delta q_j(t_0)=\delta q_j(t_1)=0$$

于是上式为

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{\partial T}{\partial q_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)+Q_j\right]\delta q_j\mathrm{d}t=0 \tag{6.2.4}$$

对于完整系统，所有广义坐标的变分 δq_j 都是独立的，即 δq_j 的取值是任意的，因此要使上式在任意的积分限 t_0 到 t_1 内成立，其充分必要条件是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j\qquad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ k) \tag{6.2.5}$$

式(6.2.5)就是完整系统的**拉格朗日第二类方程**。由以上推导过程可见，拉格朗日第二类方程只适用于完整系统，而不适用于非完整系统，因为对于非完整系统，δq_j 并非都是独立的，因此不能得到式(6.2.5)。

如果所有的主动力都是有势力，则存在一个势函数 $V(q_1, q_2, \cdots, q_k, t)$使下列等式成立

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \cdots, k) \tag{6.2.6}$$

代入式(6.2.5)后为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \cdots, k) \tag{6.2.7}$$

根据拉格朗日函数的定义

$$L = T - V$$

一般情况下，它是广义坐标、广义速度及时间的函数，即

$$L = L(q_j, \dot{q}_j, t) \qquad (j = 1, 2, \cdots, k)$$

其中，变量 q_j、$\dot{q}_j$ 称为**拉格朗日变量**。而势函数 $V(q_1, q_2, \cdots, q_k, t)$中不显含广义速度 $\dot{q}_j$，因而有

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

于是拉格朗日第二类方程可简化为以下形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, k) \tag{6.2.8}$$

如果作用于质点系上的主动力中，只有一部分是有势力时，则可将广义力分为两部分，一部分是有势力的广义力$\left(-\frac{\partial V}{\partial q_j}\right)$，另一部分是非有势力的广义力，以 Q'_j 表示，则

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q'_j \qquad (j = 1, 2, \cdots, k) \tag{6.2.9}$$

代入式(6.2.5)，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q'_j \qquad (j = 1, 2, \cdots, k) \tag{6.2.10}$$

这就是拉格朗日第二类方程的一般形式。

在应用拉格朗日第二类方程时应注意以下几点：①拉格朗日方程是以广义坐标表达的任意完整系统的运动方程，方程的数目等于系统的自由度数，因而可以获得数目最少的运动方程。②在建立运动方程时只需分析已知的主动力而不必分析未知的约束力，因而，对于复杂系统拉格朗日方程更能体现其优越性。③拉格朗日方程具有很好的对称性，即对于同一位形空间中的每个坐标而言各方程都有相同的形式。④拉格朗日方程是以能量观点建立起来的运动方程。在建立系统的运动方程时，只需分析系统的动能和广义力。而广义力是分析主动力的虚功的结果。对于主动力为有势的系统，特别是保守系统，主动力的作用则完全归结为主动力的势能。

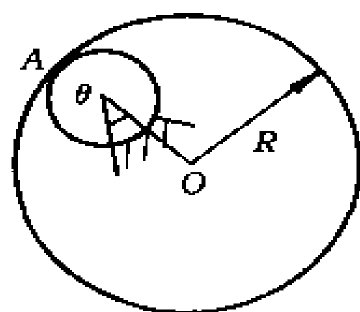


图 6－2－1

例 6－3 半径为 R、质量为 m 的圆环挂在一半径为 r 的固定圆柱上，如图 6－2－1 所示。设圆环与圆柱间有足够大的摩擦力阻止相对滑动，试写出圆环的运动微分方程，并求微幅摆动的周期。

解： 圆环具有一个自由度，是完整系统。取 θ 为广义坐标，圆环的动能

$$T=\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}J_O\omega^2$$

其中 $v_0=(R-r)\dot{\theta}$，瞬心为 A，则

$$\omega=\frac{v_0}{R}=\frac{R-r}{R}\dot{\theta}$$

主动力有势，系统的势能

$$V=-mg(R-r)\cos\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}=2m(R-r)^2\dot{\theta},\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}})=2m(R-r)^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial\theta}=0,\frac{\partial V}{\partial\theta}=mg(R-r)\sin\theta$$

代人拉格朗日方程式(6.2.7)，得到系统的动力学方程为

$$2m(R-r)^2\ddot{\theta}+mg(R-r)\sin\theta=0$$

即

$$2(R-r)\ddot{\theta}+g\sin\theta=0$$

考虑到微幅振动，$\sin\theta\approx\theta$，则有

$$\ddot{\theta}+\frac{g\theta}{2(R-r)}=0$$

周期

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{2(R-r)}{g}}$$

由于主动力有势，可以写出拉格朗日函数，即

$$L=T-V=m(R-r)^2\dot{\theta}^2+mg(R-r)\cos\theta$$

代入式(6.2.8)中同样可以得到系统的动力学方程。

例 6-4 滑块 A 质量为 m_1，可沿光滑水平导轨滑动；小球 B 质量为 m_2，通过一长为 l 的无重刚杆与滑块 A 以光滑铰链 O_1 相连，可在铅直平面内摆动(图 6-2-2)。试列出此质点系的运动微分方程。

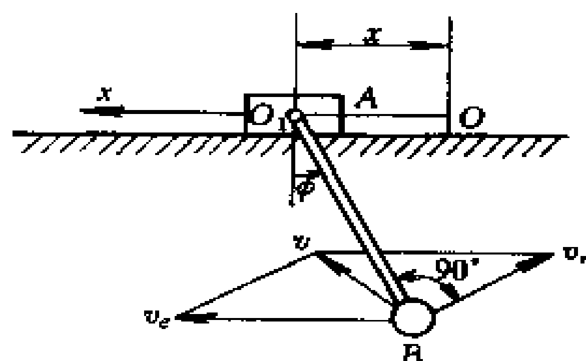


图 6-2-2

解：此质点系具有二个自由度，现取滑块 A 的水平坐标 x (以滑块的起始位置为坐标原点，正向如图)及杆 O_1B 与铅直线的夹角 φ (由铅直线起，逆时针为正)为广义坐标。

滑块 A 的动能

$$T_1=\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2$$

小球 B 的速度

$$\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$$

其中

$$v_e=\dot{x}\qquad v_r=l\dot{\varphi}$$

故小球的动能

$$T_2=\frac{1}{2}m_2[(\dot{x}-l\dot{\varphi}\cos\varphi)^2+(l\dot{\varphi}\sin\varphi)^2]$$

因此，整个质点系的动能

$$T=T_1+T_2=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2-m_2l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi+\frac{1}{2}m_2l^2\dot{\varphi}^2$$

因为作用于质点系的主动力只有重力为有势力，现取 x 轴位置为零势能位置，可得势能函数为

$$V=-m_2gl\cos\varphi$$

从而求得系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2-m_2l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi+\frac{1}{2}m_2l^2\dot{\varphi}^2+m_2gl\cos\varphi$$

各有关导数为

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=(m_1+m_2)\dot{x}-m_2l\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=(m_1+m_2)x+m_2l\dot{\varphi}^2\sin\varphi-m_2l\varphi\cos\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi}=m_2l\dot{\varphi}\dot{x}\sin\varphi-m_2gl\sin\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=-m_2l\dot{x}\cos\varphi+m_2l^2\dot{\varphi}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)=-m_2lx\cos\varphi+m_2l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi+m_2l^2\dot{\varphi}$$

代入式(6.2.8)，得

$$\begin{cases}(m_1+m_2)x+m_2l\dot{\varphi}^2\sin\varphi-m_2l\varphi\cos\varphi=0\\ l\varphi-x\cos\varphi+g\sin\varphi=0\end{cases}$$

这就是质点系的运动微分方程，也是二阶非线性微分方程组。

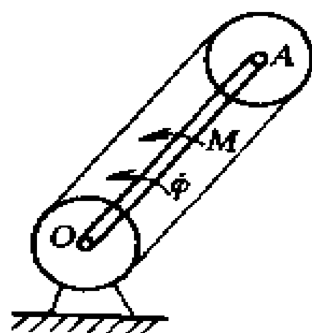


图 6-2-3

例 6-5 曲柄 $OA=l$，由转矩 M 使其绕一固定滑轮的中心转动，滑轮半径为 r。曲柄的一端 A 上带一动滑轮，其半径为 r（图 6-2-3）。定滑轮与动滑轮用皮带连结，皮带被拉紧，当系统运动时，皮带不沿轮缘滑动。设曲柄为均质杆，重为 P，滑轮重 Q，机构在水平面内运动，试求曲柄的角加速度。

解：按题意知动滑轮作平动，故动能

$$T=\frac{1}{2}\frac{Q}{g}(l\dot{\varphi})^2+\frac{1}{2}\frac{P}{3g}l^2\dot{\varphi}^2 \tag{a}$$

广义力

$$Q_\varphi=M \tag{b}$$

由拉格朗日方程可得出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=Q_\varphi \tag{c}$$

将式(a)和式(b)代入式(c)，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{l^2}{2g}\left(Q+\frac{P}{3}\right)2\dot{\varphi}\right]=M \tag{d}$$

于是

$$\varphi=\frac{3Mg}{(P+3Q)l^2} \tag{e}$$

为了正确地列出一个系统的拉格朗日方程，应该注意以下几个基本步骤。

（1）分析系统的约束条件及主动力性质，对系统的类型（完整或非完整系统、定常或非定常系统、保守或非保守系统）作出正确的判断。

（2）确定系统的自由度并选定广义坐标。

（3）用选定的广义坐标表达系统的动力学量，如动能 $T(q_j,\dot{q}_j,t)$、广义力 $Q(q_j,t)$、势函数 $V(q_j,t)$。

（4）列出拉格朗日方程组。

6.3 拉格朗日方程的首次积分

在此之前的重点是用 k 个独立的广义坐标建立完整系统的 k 个二阶的运动微分方程——拉格朗日第二类方程。此后将面临如何按照给定的初始条件求解的问题。一般来说，拉格朗日方程的结构比较复杂，直接求解并非易事。于是，如何简化方程成为本节讨论的基本内容。

对于一组 k 个二阶常微分方程，如果将其积分，必然出现 $2k$ 个

需由初始条件确定的积分常量，即 C_1，C_2，…，C_{2k}，因此，方程的解可写成

$$\left.\begin{aligned}
q_1 &= q_1(C_1, C_2, \cdots, C_{2k}, t) \\
q_2 &= q_2(C_1, C_2, \cdots, C_{2k}, t) \\
&\vdots \\
q_k &= q_k(C_1, C_2, \cdots, C_{2k}, t)
\end{aligned}\right\} \tag{6.3.1}$$

将以上各式对时间求导，得到广义速度的表示式

$$\left.\begin{aligned}
\dot{q}_1 &= \dot{q}_1(C_1, C_2, \cdots, C_{2k}, t) \\
\dot{q}_2 &= \dot{q}_2(C_1, C_2, \cdots, C_{2k}, t) \\
&\vdots \\
\dot{q}_k &= \dot{q}_k(C_1, C_2, \cdots, C_{2k}, t)
\end{aligned}\right\} \tag{6.3.2}$$

联立式(6.3.1)和式(6.3.2)，共 $2k$ 个关于积分常数 C_1，C_2，…，C_{2k}的代数方程组，于是可以解出 $2k$ 个积分常数，即

$$\left.\begin{aligned}
C_1 &= C_1(q_1, q_2, \cdots, q_k, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_k, t) \\
C_2 &= C_2(q_1, q_2, \cdots, q_k, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_k, t) \\
&\vdots \\
C_{2k} &= C_{2k}(q_1, q_2, \cdots, q_k, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_k, t)
\end{aligned}\right\} \tag{6.3.3}$$

式(6.3.3)给出的 $2k$ 个函数被称为**拉格朗日第二类方程的首次积分**。

显然，对于一个具有 k 个自由度的完整系统，如果能求得 $2k$ 个首次积分，则只要解 $2k$ 个联立代数方程，在给定的初始条件下，就能求得质点系的运动规律。若只求得一部分首次积分，也能使原来的拉格朗日方程降阶。所以，首次积分对方程的求解具有重要意义。

下面介绍拉格朗日第二类方程的两种最重要的首次积分——能量积分和循环积分。

6.3.1 能量积分

假设主动力是有势力，动能 T 和势能 V 都不显含时间 t，则拉格朗日函数只显含广义坐标和广义速度，即

$$L = T - V = L(q_j, \dot{q}_j) \qquad (j = 1, 2, \cdots, k) \tag{6.3.4}$$

因此 L 对 t 的偏导数等于零

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right) \tag{6.3.5}$$

由拉格朗日方程可知

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) \qquad (j = 1,\ 2,\ \cdots,\ k) \tag{6.3.6}$$

将式(6.3.6)代入式(6.3.5)，则有

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{k}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j$$

或者写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L\right) = 0 \tag{6.3.7}$$

从而有

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L = h \tag{6.3.8}$$

式中 h 为积分常数。式(6.3.8)称为**广义能量积分或雅可比积分**，而 $\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L\right)$ 称为**广义能量**。

广义能量积分的意义如下。

由式(6.1.5)可知系统的动能可表示为

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

于是拉格朗日函数可写成

$$\begin{aligned} L &= T - V = T_2 + T_1 + T_0 - V \\ &= L_2 + L_1 + L_0 \end{aligned} \tag{6.3.9}$$

由于势函数仅是广义坐标和时间的函数，即为广义速度的零次函数。因此，式中 L_2、L_1 和 L_0 分别是广义速度的二次齐次函数、一次齐次函数及零次齐次函数。即

$$\left.\begin{array}{l} L_2 = T_2 \\ L_1 = T_1 \\ L_0 = T_0 - V \end{array}\right\} \tag{6.3.10}$$

由欧拉齐次函数定理可得

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = 2L_2 + L_1$$

将上式代入式(6.3.7)，得

$$(2L_2 + L_1) - (L_2 + L_1 + L_0) = h$$

或

$$2T_2 + T_1 - [T_2 + T_1 - (V - T_0)] = h$$

$$T_2 - T_0 + V = h \tag{6.3.11}$$

上式是广义能量积分的另一种表达形式。如果约束是定常的，则

$$T = T_2, \qquad T_0 = 0$$

式(6.3.11)成为

$$E = T + V = h \tag{6.3.12}$$

广义能量积分退化为能量积分，即机械能守恒定律。需要指出的是，当$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$时，约束可以是非定常的。

在例6－2中，质点M受到非定常约束

$$y = (l + vt - x)\tan\alpha$$

质点的拉格朗日函数为

$$L = T - V = \frac{1}{2}m[\dot{s}^2 + (2v\cos\alpha)\dot{s} + v^2] + mg(l\tan\alpha - s\sin\alpha)$$

显然，从L的表达式可知$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$，但系统所受到的约束是非定常的。

由此可知，能量积分存在的条件是所有给定的力都必须是有势力，因为在推导能量积分时，利用了式(6.2.8)，而该式只在系统所有主动力有势时才成立。在此条件不满足时，就不必试图寻找这样的积分，因为它根本就不存在。

例6－6 细管弯成半径为r的圆环，以角速度ω绕铅垂直径转

动，质量为 m 的质点可以在细管内无摩擦地滑动，如图 6－3－1 所示。试求系统的能量积分。

解：取圆环和质点为研究对象，该系统为完整系统，系统的自由度为 2，取圆环的转角 φ 和质点在圆环上的弧心角 θ 为广义坐标，由题意 $\dot{\varphi}=\omega$ 。系统的动能

$$T=\frac{1}{2}m(r^2\dot{\theta}^2+r^2\omega^2\sin^2\theta)$$

上式中

$$T_2=\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2,\quad T_1=0$$

$$T_0=\frac{1}{2}mr^2\omega^2\sin^2\theta$$

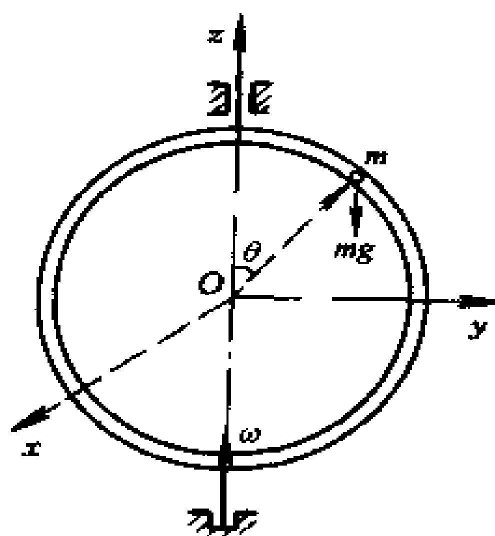


图 6－3－1

作用在系统上的主动力为有势力，势能函数

$$V=mgr\cos\theta$$

因此，系统的拉格朗日函数

$$\begin{aligned}L&=T-V=T_2+T_1+T_0-V\\&=\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mr^2\omega^2\sin^2\theta-mgr\cos\theta\end{aligned}$$

从上式可见，在拉格朗日函数 L 中不显含时间 t，即 $\frac{\partial L}{\partial t}=0$。因此，广义能量积分为

$$T_2-T_0+V=\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}mr^2\omega^2\sin^2\theta+mgr\cos\theta=h$$

例 6－7 具有一个自由度的质点在势力场中运动，试由能量守恒定律推导此质点的拉格朗日方程。

解：取 q 表示质点在势力场中的位置，质点的动能和势能分别为

$$T=T(q,\dot{q}),V=V(q)$$

其机械能

$$E=T+V=h \tag{a}$$

将式(a)对 t 求一次导数

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0 \tag{b}$$

且

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial T}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\ddot{q}, \quad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q}\dot{q} \tag{c}$$

又

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\dot{q}}\ddot{q}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\dot{q}\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)\dot{q}\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2T)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)\dot{q}\end{aligned} \tag{d}$$

由欧拉齐次函数定理知

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\dot{q}=2T$$

将式(c)和式(d)代入式(b)，得

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial T}{\partial q}+\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q}\right)\dot{q}=0$$

因 $\dot{q}\neq 0$，于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial T}{\partial q}=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q} \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=0$$

式中 $L=T-V$。

6.3.2 循环积分

对于受有势力作用的完整系统，拉格朗日第二类方程的形式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \qquad (j=1,2,\cdots,k) \tag{6.3.13}$$

其中拉格朗日函数 L 是广义坐标、广义速度和时间 t 的函数，即

$$L=L(q_j,\dot{q}_j,t) \qquad (j=1,2,\cdots,k)$$

适当地选择确定系统位形的广义坐标，使其在拉格朗日函数中不显含某些广义坐标 q_1，q_2，$\cdots$，q_l，即

$$L=L(q_{l+1},q_{l+2},\cdots,q_k,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_k,t)$$

则 q_1，q_2，$\cdots$，q_l 称为系统的**循环坐标**（或**可遗坐标**）。显然，函数 L 对于循环坐标的偏导数都应等于零，即

$$\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \qquad (j=1,2,\cdots,l) \tag{6.3.14}$$

于是，对应循环坐标的拉格朗日第二类方程变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)=0 \qquad (j=1,2,\cdots,l)$$

由此可得首次积分

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=C_j \qquad (j=1,2,\cdots,l) \tag{6.3.15}$$

其中 C_j 为积分常数，上式所表示的首次积分称为**循环积分**。

引入**广义动量** p_j，定义为

$$p_j=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

因为 $L=T-V$，且势能函数 V 仅是 q_j 及 t 的函数，因此有

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}=0$$

所以广义动量又可表示为

$$p_j=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

于是循环积分的力学含义便可理解为：受有势力作用的完整系统，当存在循环坐标 q_j 时，对应的广义动量 p_j 保持不变，或广义动量守恒。

广义动量表达式的物理意义如下。

将拉格朗日第二类方程写成如下形式，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)=Q_j+\frac{\partial T}{\partial q_j} \qquad (j=1,2,\cdots,l)$$

显然$\frac{\partial T}{\partial q_j}$项与广义力 Q_j 具有相同的量纲，即力或者力矩的量纲。再将上式与牛顿方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{F}$$

作比较，可见$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$与动量 $m\boldsymbol{v}$ 在方程中具有相当的位置，故称为广义

动量。需要注意的是，广义动量的量纲不一定是动量的量纲，在具体的问题中，它可以是动量、动量矩以及更广泛的物理意义。下面用两个例子来说明这一点。

例如，一质点在重力场内运动，若取直角坐标为广义坐标，则此质点的动能可表示为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$$

因此，对应于广义坐标的广义动量分别为

$$p_x=\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=m\dot{x},\quad p_y=\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}=m\dot{y},\quad p_z=\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}=m\dot{z}$$

显然，在本例中广义动量即为质点动量 $m\boldsymbol{v}$ 分别在坐标轴上的投影。

再如，一质点在有心力作用下运动，运动轨迹是一平面曲线。取如图 6－3－2 所示平面极坐标为广义坐标(ρ，φ)，则质点的动能可表示为

$$T=\frac{1}{2}m\ (\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2)$$

因此对应于广义坐标的广义动量

$$p_\varphi=\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=m\rho^2\dot{\varphi}=(m\rho\dot{\varphi})\rho$$

$$p_\rho=\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}}=m\dot{\rho}$$

此时，广义动量 p_φ 即为质点对力心 O 的动量矩，而广义动量 p_ρ 则为质点动量 mv 在极坐标 ρ 轴上的投影。

例 6－8 一旋转摆如图 6－3－3 所示。摆长为 l，摆锤质量为

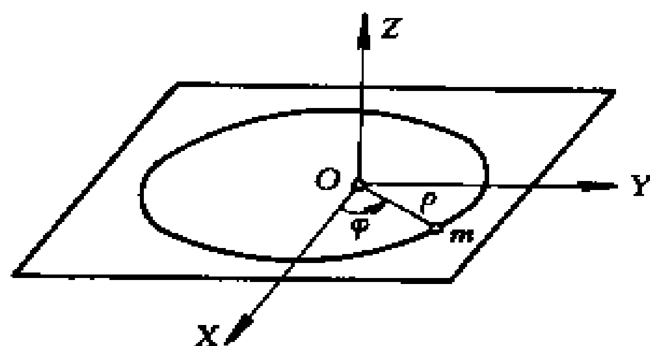


图 6－3－2

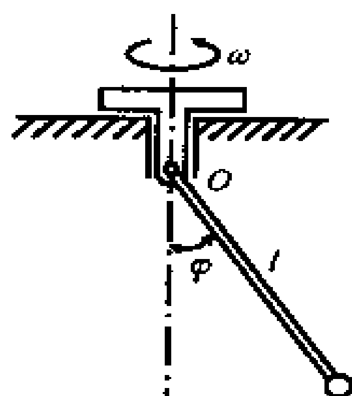


图 6－3－3

m，用光滑铰链连结在铅垂轴上。（1）铅垂轴以等角速度 ω 转动；（2）铅垂轴以任意角速度转动。试求以上两种情况下的首次积分。

解：（1）此情况下系统为一个自由度的非定常系统。取摆和铅垂线之间的夹角 φ 为广义坐标。摆锤的重力是主动力，属有势力，因此系统的动能及势能可表示为

$$T = \frac{1}{2} m (l^2 \varphi^2 + \omega^2 l^2 \sin^2 \varphi)$$

$$V = - mgl \cos\varphi$$

其中势能的零位置取为 $\varphi = \frac{\pi}{2}$处。系统的拉格朗日函数

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (l^2 \dot{\varphi}^2 + l^2 \omega^2 \sin^2 \varphi) + mgl \cos\varphi$$

由于系统是非定常的，在 T 中出现了 T_0 项，即

$$T_0 = \frac{1}{2} ml^2 \omega^2 \sin^2 \varphi$$

又由于 L 不显含 t，所以存在能量积分

$$T_2 - T_0 + V = h$$

或

$$\frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 - mgl \cos\varphi - \frac{1}{2} ml^2 \omega^2 \sin^2 \varphi = h$$

（2）若铅垂轴以任意角速度转动。此情形下，系统具有两个自由度，取广义坐标 φ 和绕铅垂轴转动的角位移 θ，拉格朗日函数 L 为

$$L = \frac{1}{2} m (l^2 \dot{\varphi}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi) + mgl \cos\varphi$$

由于 L 不显含 θ，所以存在循环积分

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = C_\theta$$

或

$$ml^2 \sin^2 \varphi \theta = C_\theta$$

这个循环积分的物理意义表示系统对铅垂轴的动量矩守恒。

需要注意：当条件发生变化时，由原来一个自由度的非定常系统已转变为了两个自由度的定常系统。因此能量积分表现为系统的机械能

守恒，即

$$T + V = h$$

或

$$\frac{1}{2} m (l^2 \dot{\varphi}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi) - mgl \cos\varphi = h$$

6.4 拉格朗日方程的降维法——罗司方程和惠特克方程

在上一节中，利用第一积分，使二阶的拉格朗日微分方程部分地降为一阶的微分方程，在一定程度上简化了方程的求解。在这节里将利用循环积分和能量积分降低拉格朗日方程的维数，即罗司方程和惠特克方程。

6.4.1 罗司方程

罗司于 1876 年应用循环积分，使具有 k 个广义坐标的拉格朗日方程降维，即仅保留$(k-l)$个非循环坐标的拉格朗日方程——罗司方程。

6.4.1.1 勒让德变换

勒让德变换是把以$x_1, x_2, \cdots, x_n$为变量的函数$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$变换成以$y_1, y_2, \cdots, y_n$为新变量的函数$\tilde{f}(y_1, y_2, \cdots, y_n)$的一种特殊变换，$\tilde{f}$称为$f$的**勒让德变换**。

设有一个二次可微的函数$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，且在雅可比行列式不为零，即

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{6.4.1}$$

的区域内存在以下变量变换

$$y_s = \frac{\partial f}{\partial x_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{6.4.2}$$

由于式(6.4.1)成立，从而保证了式(6.4.2)反函数的存在，即 x_s 可从式(6.4.2)中解出，得

$$x_s = x_s(y_1, y_2, \cdots, y_n) \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{6.4.3}$$

于是，定义 f 的勒让德变换为

$$\tilde{f}(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \sum_{s=1}^{n} x_s y_s - f \tag{6.4.4}$$

由此可得

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_s} = x_s + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial x_r}{\partial y_s} y_r - \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial y_s}$$

利用关系式(6.4.2)，上式成为

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_s} = x_s \tag{6.4.5}$$

由此可见，由勒让德变换建立起来的新旧变量之间存在着一种互换关系，即新变量是旧函数的导数，而旧变量则是新函数的导数。

下面给出对部分变量进行变换的情况。假若考虑函数 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_m)$，其中部分变量 x_s $(s=1,2,\cdots,n)$将用新变量 y_s 代替，并且同时保留变量 $\tilde{x}_r$ $(r=1,2,\cdots,m)$。在此情况下构造勒让德变换 $\tilde{F}(y_1, y_2, \cdots, y_n, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_m)$，即可使上述情况推广为

$$\tilde{F}(y_1, y_2, \cdots, y_n, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_m) = \sum_{s=1}^{n} x_s y_s - F \tag{6.4.6}$$

于是有

$$y_s = \frac{\partial F}{\partial x_s}, \quad x_s = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{6.4.7}$$

并可反解出

$$x_s = x_s(y_1, y_2, \cdots, y_n, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_m) \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{6.4.8}$$

在此情形下，新旧函数对保留变量的偏导数存在着如下重要性质，即

$$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{x}_r} = -\frac{\partial F}{\partial \widetilde{x}_r} \qquad (r = 1, 2, \cdots, m) \tag{6.4.9}$$

现在来证明这一性质。将式(6.4.6)两边对 $\widetilde{x}_r$ 求导，并注意到式(6.4.8)，则有

$$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{x}_r} = \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_r}\left[\sum_{s=1}^{n} \hat{x}_s y_s - \hat{F}\right] = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \hat{x}_s}{\partial \widetilde{x}_r} y_s - \frac{\partial \hat{F}}{\partial \widetilde{x}_r} \tag{6.4.10}$$

符号 $\hat{x}_s$ 和 $\hat{F}$ 说明已将它们表示为变量 y_s 的函数。于是上式成为

$$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{x}_r} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \hat{x}_s}{\partial \widetilde{x}_r} y_s - \left(\frac{\partial F}{\partial \widetilde{x}_r} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_s} \frac{\partial \hat{x}_s}{\partial \widetilde{x}_r}\right) \tag{6.4.11}$$

将 $y_s = \frac{\partial F}{\partial x_s}$ 代入上式，即证得

$$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{x}_r} = -\frac{\partial F}{\partial \widetilde{x}_r} \qquad (r = 1, 2, \cdots, m) \tag{6.4.12}$$

本书在推导罗司方程、哈密顿正则方程和正则变换时，都用到了勒让德变换。

6.4.1.2　罗司方程的推导

设有一完整系统，在 k 个广义坐标中有 l 个循环坐标，于是系统的拉格朗日函数为

$$L = L(q_{l+1}, q_{l+2}, \cdots, q_k, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_k, t)$$

同时存在循环积分

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = C_j \qquad (j = 1, 2, \cdots, l)$$

现在来构造 L 的勒让德变换。以 C_j $(j = 1, 2, \cdots, l)$ 为新变量代替 $\dot{q}_j (j = 1, 2, \cdots, l)$，根据式(6.4.6)，则 L 的勒让德变换

$$\widetilde{L} = R = \sum_{j=1}^{l} \dot{q}_j C_j - L \tag{6.4.13}$$

上式称为**罗司函数**。同时有变换

$$\frac{\partial R}{\partial C_j}=\dot{q}_j,\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=C_j \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ l) \tag{6.4.14}$$

根据勒让德变换的重要性质以及式(6.4.13)有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial q_i}=-\frac{\partial L}{\partial q_i}\\ \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}=-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\end{aligned}\quad (i=l+1,l+2,\cdots,k)\right\} \tag{6.4.15}$$

将以上各式代入拉格朗日第二类方程，对于非循环坐标即可求得罗司方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial R}{\partial q_i}=0 \quad (i=l+1,l+2,\cdots,k) \tag{6.4.16}$$

再由式(6.4.14)的第一式可得

$$q_j=\int\frac{\partial R}{\partial C_j}\mathrm{d}t \quad (j=1,2,\cdots,l) \tag{6.4.17}$$

进一步研究罗司方程可以看到，由于罗司方程与拉格朗日方程具有相同形式的表达式，因而当 R 不显含 t 时，同样存在能量积分，即

$$\sum_{i=l+1}^{k}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-R=h \tag{6.4.18}$$

或将罗司函数写成广义速度 $\dot{q}_i$ $(i=l+1,l+2,\cdots,k)$ 的二次项、一次项和零次项，即

$$R=R_2+R_1+R_0 \tag{6.4.19}$$

同理，根据欧拉齐次函数定理可得

$$\sum_{i=l+1}^{k}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=2R_2+R_1 \tag{6.4.20}$$

将式(6.4.19)和式(6.4.20)代入式(6.4.18)，于是能量积分又可表示为

$$R_2-R_0=h \tag{6.4.21}$$

式中 h 为积分常数。

对于一个完整系统，如果存在 l 个循环积分，总是可以通过罗司方法将原来 k 个拉格朗日方程降维到$(k-l)$个与拉格朗日方程具有相同形式的罗司方程。下面再介绍一种利用能量积分对拉格朗日方程

降维的方法——惠特克方程。

6.4.2 惠特克方程

1900 年惠特克仿照罗司的方法，得到了应用能量积分的动力学方程降维法。能量积分为

$$\sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = h \tag{6.4.22}$$

式中 L 为拉格朗日函数 $L(q_1, q_2, \cdots, q_k, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_k)$。当系统存在能量积分时 L 是不显含时间 t 的，于是可取任一个广义坐标，例如取 q_1 来代替 t 的作用。将其他广义坐标对 q_1 的导数记为

$$q'_r = \frac{\mathrm{d}q_r}{\mathrm{d}q_1} \quad (r = 2, 3, \cdots, k)$$

则

$$\dot{q}_r = \frac{\mathrm{d}q_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q_r}{\mathrm{d}q_1}\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} = q'_r \dot{q}_1 \quad (r = 2, 3, \cdots, k)$$

将上述表达式代入 L 函数中，则 L 变成一个新函数 Ω，

$$L(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_k, q_1, q_2, \cdots, q_k) \equiv \Omega(\dot{q}_1, q'_2, \cdots, q'_k, q_1, q_2, \cdots, q_k)$$

将上式两边分别对 $\dot{q}_1$、$\dot{q}_r (r = 2, 3, \cdots, k)$ 和 $q_s (s = 1, 2, \cdots, k)$ 取导数，得

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} + \sum_{r=2}^{k} \frac{\partial \Omega}{\partial q'_r}\frac{\partial q'_r}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} + \sum_{r=2}^{k} \frac{\partial \Omega}{\partial q'_r}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\frac{\dot{q}_r}{\dot{q}_1}\right) \\ &= \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} - \sum_{r=2}^{k} \frac{\dot{q}_r}{\dot{q}_1^2}\frac{\partial \Omega}{\partial q'_r} \end{aligned} \tag{6.4.23}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial \Omega}{\partial q'_r}\frac{\partial q'_r}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial \Omega}{\partial q'_r}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_r}\left(\frac{\dot{q}_r}{\dot{q}_1}\right) = \frac{1}{\dot{q}_1}\frac{\partial \Omega}{\partial q'_r} \quad (r = 2, 3, \cdots, k) \tag{6.4.24}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_s} = \frac{\partial \Omega}{\partial q_s} \quad (s = 1, 2, \cdots, k) \tag{6.4.25}$$

将式(6.4.24)代入式(6.4.23)中，得

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} + \sum_{r=2}^{k} \frac{\dot{q}_r}{\dot{q}_1}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\frac{\dot{q}_r}{\dot{q}_1} \tag{6.4.26}$$

现在要利用能量积分公式(6.4.22)，把 $\dot{q}_r$ 代以 $\dot{q}_1 q'_r$ ($r=2,3,\cdots,k$)，则能量积分变成 $\dot{q}_1$，q'_2，$\cdots$，q'_k 和 q_1，q_2，$\cdots$，q_k 的方程。从而解出

$$\dot{q}_1 = f(q'_2, q'_3 \cdots, q'_k, q_1, q_2, \cdots, q_k)$$

将上式的 $\dot{q}_1$ 代入式(6.4.26)中，$\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1}$所形成的函数称为**惠特克函数**，用 W 表示，即

$$W(q'_2, q'_3, \cdots, q'_k, q_1, q_2, \cdots, q_k) \equiv \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} \tag{6.4.27}$$

将上式对 q'_r 取导数，有

$$\frac{\partial W}{\partial q'_r} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial q'_r \partial \dot{q}_1} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_r} \tag{6.4.28}$$

再对 q_r 取导数，有

$$\frac{\partial W}{\partial q_r} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial q_r \partial \dot{q}_1} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2} \frac{\partial q_1}{\partial q_r} \tag{6.4.29}$$

为了简化式(6.4.28)和式(6.4.29)的右端，利用式(6.4.26)和 $L \equiv \Omega$，将能量积分公式(6.4.22)改写为

$$\dot{q}_1 \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} = h + \Omega \tag{6.4.30}$$

将上式看成是 $\dot{q}_1$ 对 q'_2，q'_3，$\cdots$，q'_k 和 q_1，q_2，$\cdots$，q_k 的函数关系式，并对 q'_r 取导数，则得

$$\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_r} \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} + \dot{q}_1 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_r} + \dot{q}_1 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1 \partial q'_r} = \frac{\partial \Omega}{\partial q'_r} + \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_r}$$

弃去两端共同部分，上式简化为

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_r} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1 \partial q'_r} = \frac{1}{\dot{q}_1} \frac{\partial \Omega}{\partial q'_r}$$

于是式(6.4.28)变为

$$\frac{\partial W}{\partial q'_r} = \frac{1}{\dot{q}_1} \frac{\partial \Omega}{\partial q'_r} \tag{6.4.31}$$

再将式(6.4.30)对 q_r 取导数，得

$$\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_r}\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1}+\dot{q}_1\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2}\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_r}+\dot{q}_1\frac{\partial^2 \Omega}{\partial q_r \partial \dot{q}_1}=\frac{\partial \Omega}{\partial q_r}+\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_r}\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_r}$$

弃去两端共同部分，上式简化为

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2}\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_r}+\frac{\partial^2 \Omega}{\partial q_1 \partial \dot{q}_1}=\frac{1}{\dot{q}_1}\frac{\partial \Omega}{\partial q_r}$$

于是式(6.4.29)变为

$$\frac{\partial W}{\partial q_r}=\frac{1}{\dot{q}_1}\frac{\partial \Omega}{\partial q_r} \tag{6.4.32}$$

将式(6.4.24)与式(6.4.31)比较，式(6.4.25)与式(6.4.32)比较，得

$$\frac{\partial W}{\partial q'_r}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r},\quad \frac{\partial W}{\partial q_r}=\frac{1}{\dot{q}_1}\frac{\partial L}{\partial q_r}$$

将上面两式代入拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}-\frac{\partial L}{\partial q_r}=0 \quad (r=2,3,\cdots,k)$$

得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial W}{\partial q'_r}-\dot{q}_1\frac{\partial W}{\partial q_r}=0$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_1}\frac{\partial W}{\partial q'_r}-\frac{\partial W}{\partial q_r}=0 \quad (r=2,\ 3,\ \cdots,\ k) \tag{6.4.33}$$

式(6.4.33)就是**惠特克方程**。W 中只包含($q'_2,q'_3,\cdots,q'_k,q_1,q_2,\cdots,q_k$)，其中 q_1 相当于时间 t 一样的独立变量。上式只有($k-1$)个二阶微分方组，达到了降维的目的(自由度由 k 降到 $k-1$)。

采用惠特克方法进行降维时，首先是选择某一广义坐标(q_1)来代替时间参数 t 的地位和作用。如果该广义坐标(q_1)是非循环坐标，则经过如下的一系列变换，即 $L(q_1,q_2,\cdots,q_k,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_k)\equiv\Omega(q_1,q_2,\cdots,q_k,\dot{q}_1,q'_2,\cdots,q'_k)$，$\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1}=W(q_1,q_2,\cdots,q_k,q'_2,q'_3,\cdots,q'_k)$，所得的惠特克函数 W 仍将显含 q_1。由于 q_1 在惠特克函数 W 中相当于时间变量的作用，因此，不可能从惠特克方程中再得新的

“能量积分”，即不能继续采用惠特克方法进行降维。如果所选广义坐标 q_1 是循环坐标，则在惠特克函数 W 中将不显含 q_1。此时，则可以继续采用惠特克方法进行降维，如选 q_2 代替时间变量，形成新的惠特克函数 W_1，并建立新的惠特克方程，直至惠特克函数中不存在循环坐标为止。

一般说来，在某一力学系统的运动微分方程中，如果存在循环积分和能量积分，就可以采用罗司方法和惠特克方法进行降维。如果系统的自由度数为 k，循环坐标数为 l，则该系统的拉格朗日方程数最终可以从 k 个降到 $(k-l-1)$ 个。需要指出的是，相对拉格朗日微分方程而言，循环积分和能量积分可以降低微分方程的阶数，即从二阶微分方程降为一阶微分方程。而用罗司方法和惠特克方法可以减少微分方程的个数，因此是降低了方程的维数。

例 6－9 试求出

$$T=\frac{1}{2}\frac{\dot{q}_1^2}{a+bq_2^2}+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2,\quad V=c+dq_2$$

系统的运动，其中 a、b、c 和 d 均为实数正常量，q_1、q_2 为广义坐标。

解：系统的拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}\frac{\dot{q}_1^2}{a+bq_2^2}+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2-c-dq_2 \tag{a}$$

由上式可见，q_1 是循环坐标。所以罗司函数为

$$R=\dot{q}_1p_1-L \tag{b}$$

和

$$p_1=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=\frac{\dot{q}_1}{a+bq_2^2}=c_1 \tag{c}$$

其中 c_1 为常量。将式(a)和式(c)代入式(b)，得

$$R=\frac{1}{2}c_1^2(a+bq_2^2)-\frac{1}{2}\dot{q}_2^2+c+dq_2^2 \tag{d}$$

对于非循环坐标，利用式(6.4.16)，有

$$\ddot{q}_2+(2d+bc_1^2)q_2=0 \tag{e}$$

由上式解出

$$q_2 = A\sin[(2d + bc_1^2)^{1/2}t + \alpha] \tag{f}$$

式中 A 和 α 是积分常量。

对于循环坐标，再利用式(6.4.17)，得

$$q_1 = \int \frac{\partial R}{\partial c_1}\mathrm{d}t = \int (a + bq_2^2)c_1\mathrm{d}t \tag{g}$$

将式(f)代入式(g)，则有

$$q_1 = c_1\left(a + \frac{1}{2}bA^2\right)t - \frac{c_1 ba^2}{4(2d + bc_1^2)^{1/2}}\sin[2(2d + bc_1^2)^{1/2}t + \alpha] + \beta$$

其中 β 是积分常量。

例 6－10 具有质量为 m_1 和 m_2 的两质点用一软绳连接(图 6－4－1)。绳的中间连一劲度系数为 k 的弹簧，绳绕过一不计质量的滑轮，两质点可在光滑的水平管内自由滑动，而管绕 AB 轴转动，管对 AB 轴的转动惯量为 J，试用罗司方程建立系统的运动微分方程。

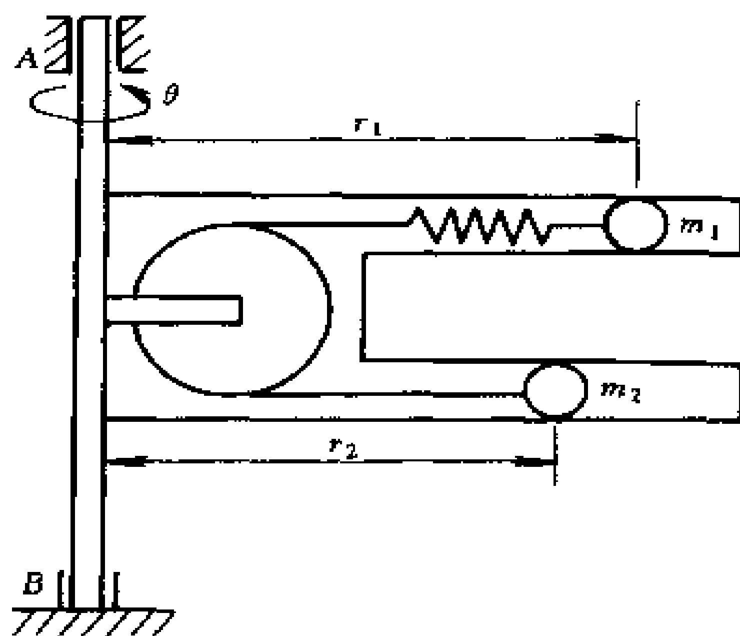


图 6－4－1

解： 这是三个自由度的完整系统。取 r_1、r_2 和 θ 为广义坐标，系统的动能

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}_1^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{r}_2^2 + r_2^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

系统的势能

$$V = \frac{1}{2}k(r_1 + r_2 - l_0)^2 + V_1$$

式中的 V_1 是重力势能，为一常数，l_0 为绳与弹簧的原长。系统的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}_1^2 + r_1^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{r}_2^2 + r_2^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

$$-\frac{1}{2}k(r_1+r_2-l_0)^2-V_1$$

由上式看到 θ 为循环坐标，有循环积分

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=m_1r_1^2\dot{\theta}+m_2r_2\dot{\theta}+J\dot{\theta}=C_1$$

由此得到

$$\dot{\theta}=\frac{C_1}{m_1r_1^2+m_2r_2^2+J} \tag{a}$$

根据罗司函数 R 的定义，有

$$\begin{aligned}
R&=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\dot{\theta}-L\\
&=\frac{C_1^2}{m_1r_1^2+m_2r_2^2+J}-\frac{1}{2}m_1[\dot{r}_1^2+r_1^2\frac{C_1^2}{(m_1r_1^2+m_2r_2^2+J)^2}]\\
&\quad-\frac{1}{2}m_2[\dot{r}_2^2+r_2^2\frac{C_1^2}{(m_1r_1^2+m_2r_2^2+J)^2}]\\
&\quad-\frac{1}{2}J\frac{C_1^2}{(m_1r_1^2+m_2r_2^2+J)^2}\\
&\quad+\frac{1}{2}k(r_1+r_2-l_0)^2-V_1
\end{aligned}$$

这样

$$\frac{\partial R}{\partial\dot{r}_1}=-m_1\dot{r}_1,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial R}{\partial\dot{r}_1}\right)=-m_1\ddot{r}_1$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial r_1}&=\frac{-2m_1r_1C_1^2}{(m_1r_1^2+m_2r_2^2+J)^2}-\frac{1}{2}m_1\{[2r_1C_1^2(m_1r_1^2+m_2r_2^2+J)^2\\
&\quad-r_1^2C_1^2(m_1r_1^2+m_2r_2^2+J)\cdot 2m_1r_1]/(m_1r_1^2+m_2r_2^2+J)^2\}\\
&\quad-\frac{1}{2}m_2[\frac{-2r_2^2C_1^2(m_1r_1^2+m_2r_2+J)2m_1r_1}{(m_1r_1^2+m_2r_2^2+J)^4}]\\
&\quad-\frac{1}{2}JC_1^2[\frac{-2m_1r_1}{(m_1r_1^2+m_2r_2^2+J)^4}]+k(r_1+r_2-l_0)\\
&=-\frac{m_1r_1C_1^2}{(m_1r_1^2+m_2r_2^2+J)^2}+k(r_1+r_2-l_0)\\
&=-m_1r_1\dot{\theta}^2+k(r_1+r_2-l_0)
\end{aligned}$$

代人罗司方程，有

$$m_1\ddot{r}_1-\frac{m_1r_1C_1^2}{(m_1r_1^2+m_2r_2^2+J)^2}=-k\ (r_1+r_2-l_0) \tag{b}$$

同样由罗司方程得到

$$m_2\ddot{r}_2-\frac{m_2r_2C_1^2}{(m_1r_1^2+m_2r_2^2+J)^2}=-k\ (r_1+r_2-l_0) \tag{c}$$

式(b)和式(c)是关于变量 r_1、r_2 的二阶非线性微分方程，由此解出 r_1、r_2，再代入式(a)，积分后，

$$\theta=\int_0^t\frac{C_1}{m_1r_1^2+m_2r_2^2+J}\mathrm{d}t$$

6.5 耗散系统

本节将讨论拉格朗日方程应用于含有耗散力的系统。在实际工程中，存在大量依赖于速度的阻力，如当物体在气体、液体中运动时受到的流动介质的阻力、两个相对运动的物体在其接触面间的库仑摩擦力等。实验表明，它们都与相对速度有关，并且使系统的总能量不断减少。这种力统称为**耗散力**。

作用于系统的耗散力一般可表示成如下形式

$$\boldsymbol{F}_i=-k_if_i(v_i)\frac{\boldsymbol{v}_i}{v_i}\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{6.5.1}$$

式中 $\boldsymbol{v}_i$ 表示第 i 个质点的速度，$\boldsymbol{F}_i$ 表示第 i 个质点所受的耗散力，k_i 及 $f_i(v_i)$是广义坐标及速度 v_i 的正值函数，n 为系统包含的质点数。

在完整系统同时受有势力和非有势力作用时，拉格朗日第二类方程的形式为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=Q'_j\quad(j=1,2,\cdots,k) \tag{6.5.2}$$

式中 Q'_j 表示非有势力产生的广义力。现在研究非有势力为耗散力的情形。

根据广义力的定义

$$Q'_j = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{n} k_i f_i(v_i) \frac{\boldsymbol{v}_i}{v_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \tag{6.5.3}$$

为了计算上式，首先证明拉格朗日经典关系$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j} = \dfrac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}$。

将 $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \cdots, q_k, t)$两边对时间 t 求导，得

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$$

由于式中$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$和$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$仅是广义坐标($q_1$，$q_2$，…，$q_k$)和 t 的函数，因此将上式对 $\dot{q}_j$ 求偏导数，即得关系式

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

将上式代入式(6.5.3)，得

$$Q'_j = -\sum_{i=1}^{n} k_i f_i(v_i) \frac{\boldsymbol{v}_i}{v_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \tag{6.5.4}$$

式中二矢量的标积可写为

$$\boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i) = \frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial \dot{q}_j} = v_i \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j}$$

因此有

$$\begin{aligned} Q'_j &= -\sum_{i=1}^{n} k_i f_i(v_i) \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} \\ &= -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^{n} k_i \int_0^{v_i} f_i(v_i) \mathrm{d} v_i \end{aligned} \tag{6.5.5}$$

令

$$D = \sum_{i=1}^{n} k_i \int_0^{v_i} f_i(v_i) \mathrm{d} v_i \tag{6.5.6}$$

函数 D 称为**耗散函数**。由于被积函数为正值函数，因此有

$$D \geqslant 0$$

于是耗散力的广义力

$$Q'_j = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1, 2, \cdots, k) \tag{6.5.7}$$

正如有势力可由势能函数来表示一样，耗散力也可由耗散函数 D 来表示。将上式代入拉格朗日第二类方程，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=-\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} \quad (j=1,2,\cdots,k) \tag{6.5.8}$$

显然，对于作用于系统的阻力来说，在给定 k_i 和 $f_i(v_i)$ 以后，即可写出耗散函数 D。

为了说明耗散函数的物理意义，考虑这样的阻力，即取

$$f_i(v_i)=v_i^m \tag{6.5.9}$$

由式(6.5.6)可求出耗散函数

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{n} k_i v_i^{m+1} \\ &= \frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{n} k_i \left|\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right|^{m+1} \end{aligned} \tag{6.5.10}$$

可见，D 是广义速度 $\dot{q}_j$ 的 $(m+1)$ 次齐次函数。假设系统的约束是定常约束，那么系统的动能是广义速度的二次齐次函数。将式(6.5.8)两边乘以 $\dot{q}_j$，然后对 k 个方程求总和得

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j-\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j=-\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j$$

将上式改写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right]-\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j+\frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)=-\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j$$

由于 $L=T-V$，且 V 仅是广义坐标 q_1，q_2，…，q_k 的函数，因此，应用欧拉齐次函数定理，当 $m=1$ 时，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2T)-\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=-2D$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+V)=-2D \tag{6.5.11}$$

上式表明系统的机械能损失率的绝对值等于两倍的耗散函数，同时反映了耗散力的本质是使系统的总能量不断减少。

例 6－11 如图 6－5－1 所示，二自由度系统中，二质点的质量

分别为 m_1 和 m_2，弹簧劲度系数 分别为 k_1 和 k_2，阻尼器的阻尼系数分别为 c_1 和 c_2，且与相对速度的大小成正比。试写出系统的耗散函数及运动方程。

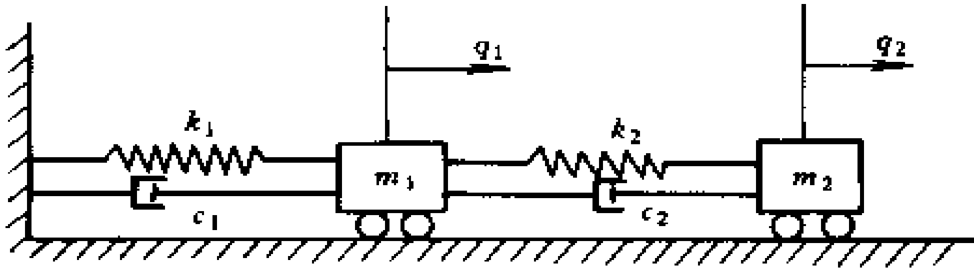


图 6－5－1

解：按图所示取广义坐标 q_1 及 q_2，系统的动能

$$T=\frac{1}{2}(m_1\dot{q}_1^2+m_2\dot{q}_2^2) \tag{a}$$

势能取决于每个弹簧两端的相对位移，有

$$V=\frac{1}{2}[k_1q_1^2+k_2(q_2-q_1)^2] \tag{b}$$

耗散函数 D 取决于阻尼器端点的相对速度，取 $m=1$，有

$$D=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}c_i(\Delta v_i)^2=\frac{1}{2}[c_1\dot{q}_1^2+c_2(\dot{q}_2-\dot{q}_1)^2] \tag{c}$$

将 T、V 及 D 的值代入拉格朗日方程式(6.5.8)，得

$$\left.\begin{aligned}&m_1\ddot{q}_1+(c_1+c_2)\dot{q}_1-c_2\dot{q}_2+(k_1+k_2)q_1-k_2q_2=0\\&m_2\ddot{q}_2-c_2\dot{q}_1+c_2\dot{q}_2-k_2q_1+k_2q_2=0\end{aligned}\right\} \tag{d}$$

例 6－12 一空间弹簧摆(图 6－5－2)，质点的质量为 m，弹簧的劲度系数为 k，作用在质点上的耗散力 $F=\mu v^2$，求摆的运动微分方程。

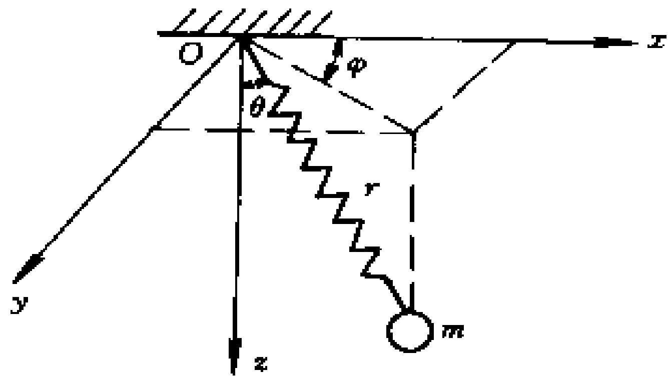


图 6－5－2

解：此摆为三个自由度，取 r、φ、θ 为广义坐标，系统的动能

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)$$

重力与弹性力的势能

$$V=-mgr\cos\theta+\frac{1}{2}k(r-r_0)^2$$

耗散函数

$$D=\frac{\mu}{3}v^3$$

由于

$$v=(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2)^{1/2}$$

于是

$$D=\frac{\mu}{3}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2)^{3/2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial L}{\partial\dot{r}})=mr$$

$$\frac{\partial L}{\partial r}=mr\dot{\theta}^2+mr\sin^2\theta\dot{\varphi}+mg\cos\theta-k(r-r_0)$$

$$\frac{\partial D}{\partial\dot{r}}=\mu\dot{r}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2)^{1/2}$$

代入拉格朗日方程，经整理后，有

$$mr+\mu\dot{r}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)^{1/2}-m(r\dot{\theta}^2+r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)$$
$$+k(r-r_0)-mg\cos\theta=0$$

同理,得到对应于 θ 和 φ 的方程分别为

$$mr^2\ddot{\theta}+2mr\dot{r}\dot{\theta}-mr^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta+\mu r^2\dot{\theta}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)^{1/2}$$
$$+mgr\sin\theta=0$$

$$mr^2\varphi\sin^2\theta+2mr\dot{r}\dot{\varphi}\sin^2\theta+2mr^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$$

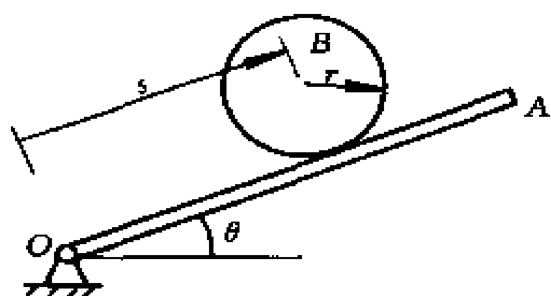
$$+\mu r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)=0$$

习　　题

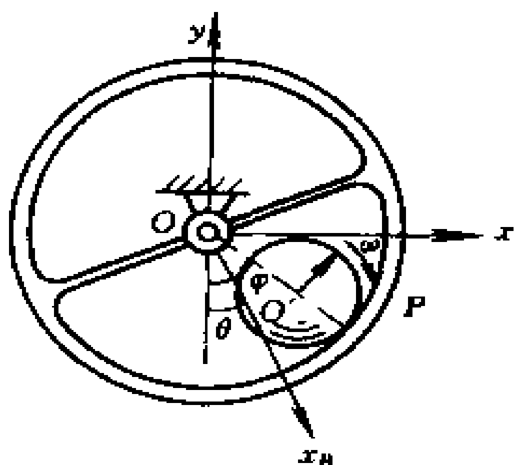
6－1　质量为 m，半径为 r 的均质圆盘 B 在直杆 OA 上作纯滚

动，而 OA 杆绕 O 点以匀角速度 ω 在铅垂平面内转动，如题 6－1 图所示。以 s 为广义坐标，写出圆盘的动能。

6－2 半径为 R 的均质空心圆柱内壁足够粗糙，可绕中心水平轴 Oz 作定轴转动，绕 Oz 轴的转动惯量为 J_0。半径为 r、质量为 m 的均质圆球 O' 沿其内壁作纯滚动。试写出系统的动能（题 6－2 图）。

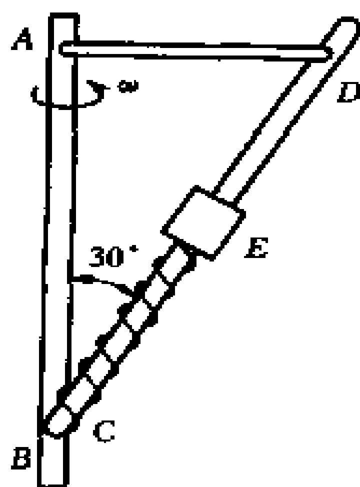


题 6－1 图

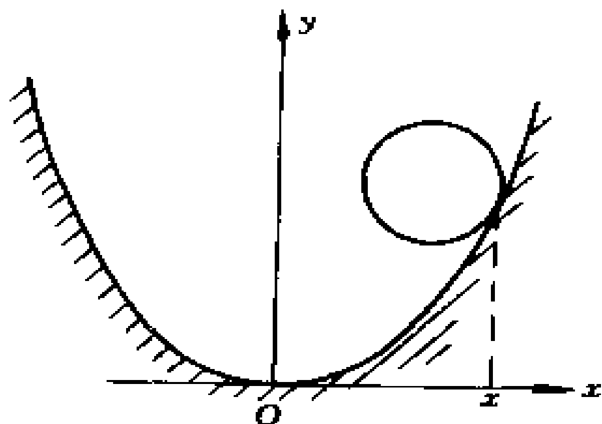


题 6－2 图

6－3 轴 AB 以匀角速度 ω 转动，质量为 m 的物体 E 可在与 AB 轴成 30°角且与之固接的光滑杆 CD 上滑动，如题 6－3 图所示。若 C、E 之间弹簧的劲度系数为 k，试建立物体 E 的运动微分方程。



题 6－3 图



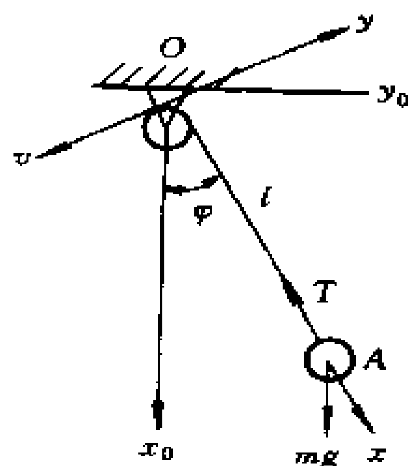
题 6－4 图

6－4 半径为 R、质量为 m 的匀质圆盘沿抛物线 $y=\frac{1}{2}ax^2$ 作无

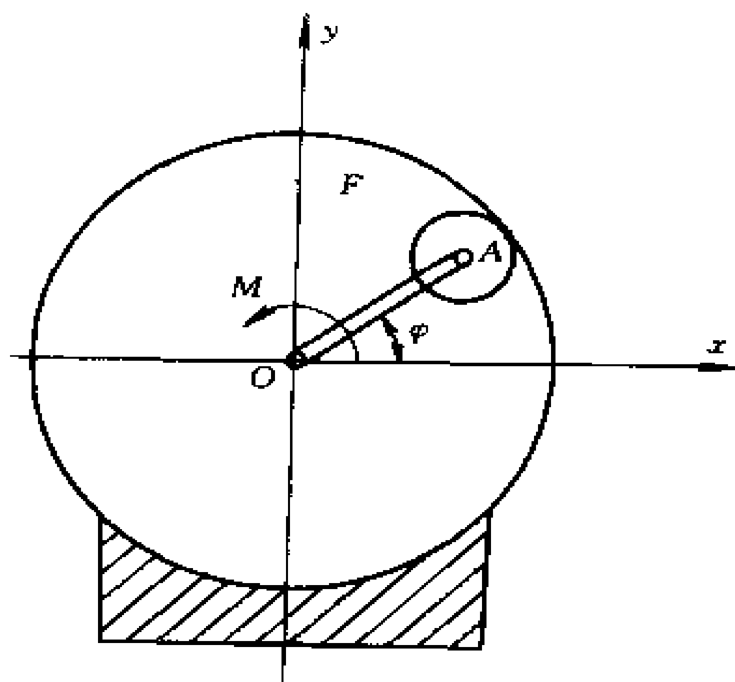
滑动地滚动，如题 6－4 图所示。Oy 轴是铅直的，$R \cdot a \leqslant 1$。取切点横坐标 x 作为广义坐标，试写出圆盘的拉格朗日函数。

6－5　一摆长可随时间改变的单摆如题 6－5 图所示。摆长的变化规律为 $l = l_0 - vt$，其中 l_0 为运动开始时的摆长，v 为常值。试建立摆的运动微分方程。

6－6　题 6－6 图所示为一内啮合齿轮机构。曲柄 OA 带动小齿轮在固定大齿轮内缘滚动。已知曲柄质量为 m_1，且为一匀质杆；小齿轮质量为 m_2、半径为 r，且为一匀质圆盘；大齿轮半径为 R。若曲柄受到一恒定的力矩 M 的作用，试用拉格朗日方程求出曲柄的运动方程。



题 6－5 图

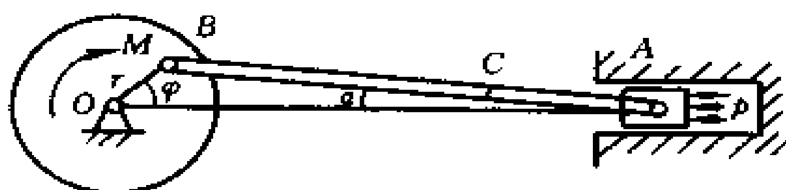


题 6－6 图

6－7　曲柄连杆机构如题 6－7 图所示，已知活塞质量为 m_1，截面积为 S，汽缸压强为 p；连杆质量为 m_2，它对活塞销 A 的转动惯量为 J_2，杆长 $AB = l$，重心在 C 点，$AC = b$，连杆的偏角 $\alpha = \angle BAO$ 很小，即 $r/l \ll 1$；曲柄及飞轮的转动惯量为 J_3，它受到的阻力矩为 M，曲柄长 $OB = r$，设摩擦及重力影响不计，求以飞轮转角 φ 为广义坐标的系统运动微分方程。

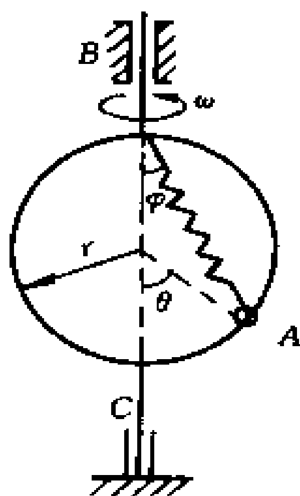
6－8　一质量为 m 的小球 A 套在一绕铅直轴 BC 以匀速 ω 转动

的光滑圆环上，并用弹簧与环上 B 点相连，如题6－8图所示。设圆环半径为 r，弹簧劲度系数为 k，原长为 $l_0(l_0<2r)$，试建立小球相对于圆环的运动微分方程。

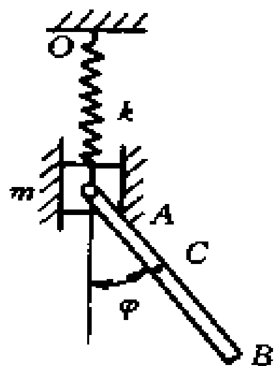


题6　7图

6－9　质量为 m 的重物悬挂在劲度系数为 k 的弹簧上，且在光滑的铅直导板中运动。在重物的质量中心处铰接一质量为 M、长为 $2l$ 的匀质杆，如题6－9图所示。若匀质杆在铅垂平面内运动，试用拉格朗日方程建立系统的运动微分方程。



题6－8图

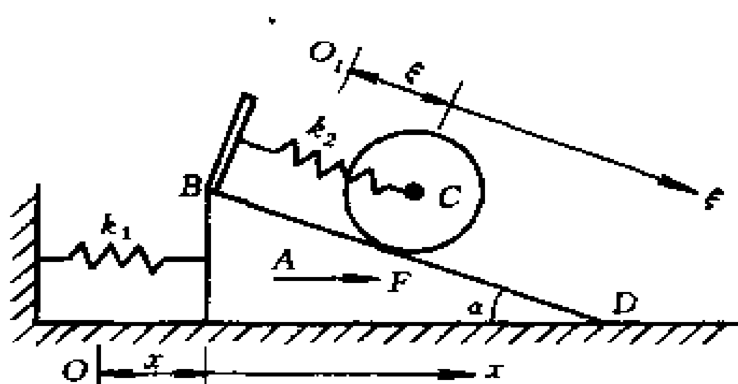


题6－9图

6－10　三角楔块 A 可沿水平光滑面作直线运动，楔块 A 的质量为 m_1，其上受有简谐力 $F=H\sin\omega t$ 的作用(H 和 ω 均为常量)。楔块斜边 BD 上有一质量为 m_2、半径为 r 的圆柱体，沿 BD 滚动而不滑动，二弹簧的劲度系数分别为 k_1 和 k_2(题6－10图)。试建立系统的运动微分方程。

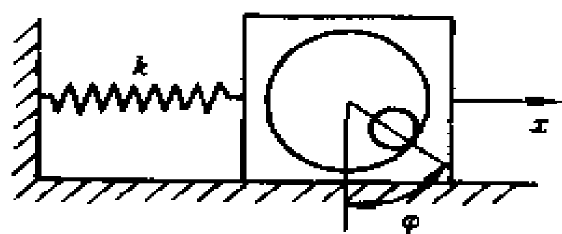
6－11　质量为 M 的方木用劲度系数为 k 的弹簧与固定墙联结，并在水平导板上作无摩擦运动。在方木内挖出半径为 R 的圆柱形空腔，空腔内有一质量为 m、半径为 r ($r<R$)的匀质圆柱做无滑动的

滚动，如题 6－11 图所示。试用拉格朗日方程建立系统的运动微分方程。

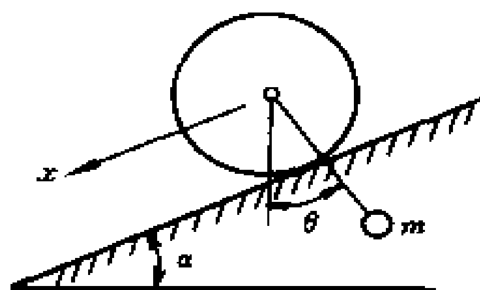


题 6～10 图

6－12　质量为 M、半径为 R 的匀质圆盘在斜面上无滑动地滚动，斜面与水平面成 α 角。质量为 m 的重物用长度为 l、不可伸长的无重绳子悬挂在圆盘中心上，如题 6－12 图所示。试以拉格朗日方程建立系统的运动微分方程。



题 6－11 图



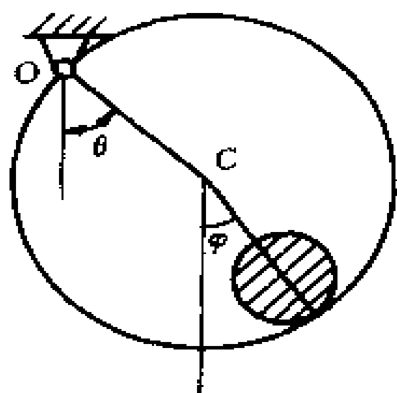
题 6－12 图

6－13　质量为 M、半径为 R 的空心圆柱绕其水平母线自由摆动，而质量为 m、半径为 r 的匀质圆柱在空心圆柱内部作无滑动的滚动(题 6－13 图)。试用拉格朗日方程建立系统的运动微分方程。

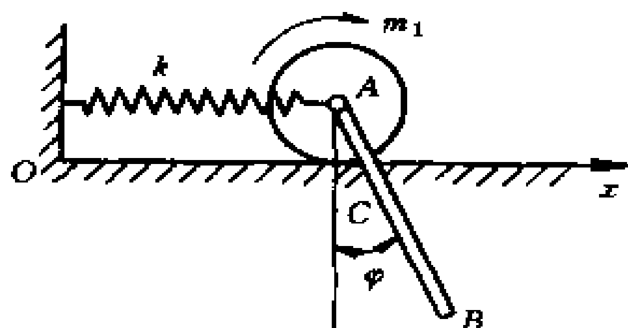
6－14　质量为 m、长度为 l 的匀质杆与质量为 m_1 的匀质圆盘中心用光滑铰链联结，构成一个物理摆。圆盘在水平导轨上作无滑动滚动，其中心用劲度系数为 k 的弹簧与固定墙联结(题 6－14 图)。试用拉格朗日方程建立系统的运动微分方程，并写出方程的首次积分。

6－15　一光滑铁丝被弯成抛物线 $y^2=2az$ 形状的框架 $AOBA$，它可绕铅直轴 Oz 转动，转动惯量为 J，铁丝上套有一质量为 m 的小球，可沿其上自由滑动，如题 6－15 图所示。若作用于框架上的力

偶矩 M 为 φ 的已知函数，即 $M=M(\varphi)$，力偶矩的方向与 Oz 轴一致，φ 为框架绕 Oz 轴的转角，试列出系统的运动微分方程，并讨论其首次积分。

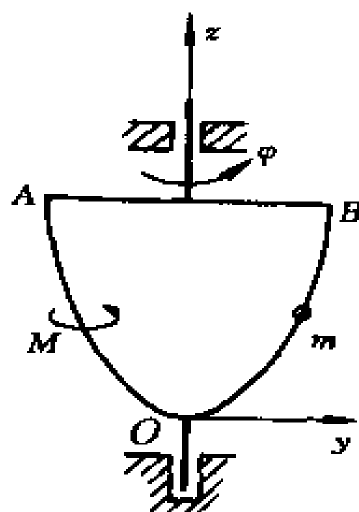


题 6-13 图

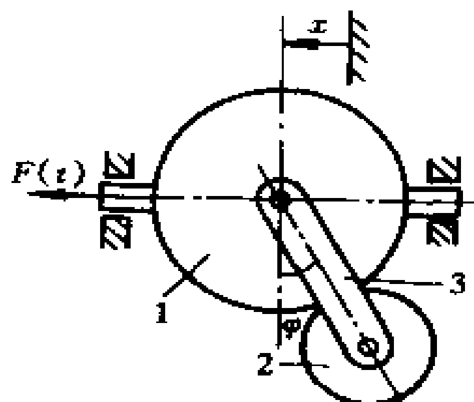


题 6-14 图

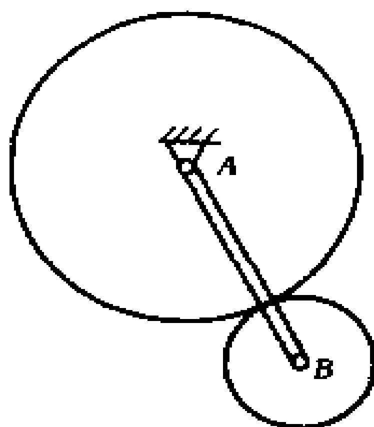
6-16 质量为 m_1、半径为 R 的齿轮 1 在水平力 $F=F_0\cos\omega t$ 作用下可沿水平轴无摩擦滑动，通过不计质量的曲柄 3 带动质量为 m_2、半径为 r 的齿轮2(可视作均质圆盘)在齿轮 1 上纯滚动，如题 6-16 图所示。试建立系统的运动微分方程，并写出 $F=0$ 时系统的首次积分。



题 6-15 图



题 6-16 图



题 6-17 图

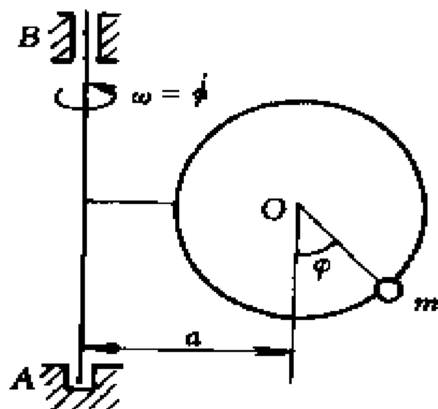
6-17 题 6-17 图所示机构在铅垂平面内，均质圆盘 A 的半径 $R=2r$，质量 $M=2m$，可绕 A 点转动。均质圆盘 B 的半径为 r，质量为 m，可在圆盘 A 的边缘上作纯滚动。均质杆 AB 的质量也为 m，所有铰链约束均为理想约束。试写出系统的运动微分方程，并求其首

次积分。

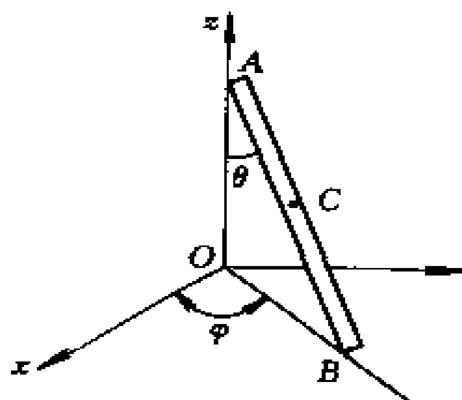
6－18 在球坐标系中牛顿引力场内质点的拉格朗日函数是$L = -m_0C^2[1-C^{-2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2]^{\frac{1}{2}}+\frac{\gamma}{r}$，$m_0$是质点静止质量，$C$是光速。写出系统的罗司函数。

6－19 半径为r、质量为M的光滑圆环，绕着与圆环中心O的距离为a的铅垂轴AB转动，轴承光滑，质量为m的小环沿着圆环运动，如题6－19图所示。假定圆环对AB轴的转动惯量等于J，试写出系统的罗司函数。

6－20 匀质直杆$AB=2l$，质量为m，一端限制在铅垂线上滑动，另一端可在水平面上滑动，如题6－20图所示，不计摩擦。试用罗司方程建立杆的运动微分方程。



题6－19图



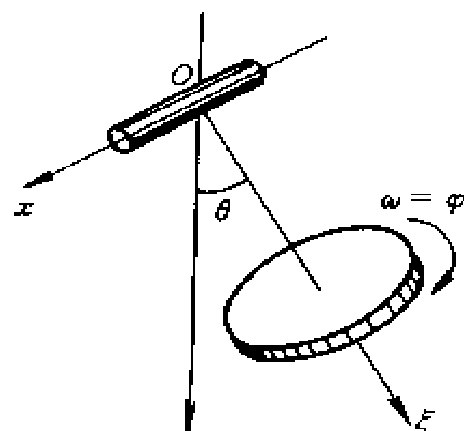
题6－20图

6－21 一匀质圆盘以角速度ω绕$O\xi$转动，$O\xi$轴又绕水平轴Ox摆动(题6－21图)，不计摩擦和空气阻力。试用罗司方程建立运动微分方程，并证明圆盘的自转并不影响它的摆动周期。

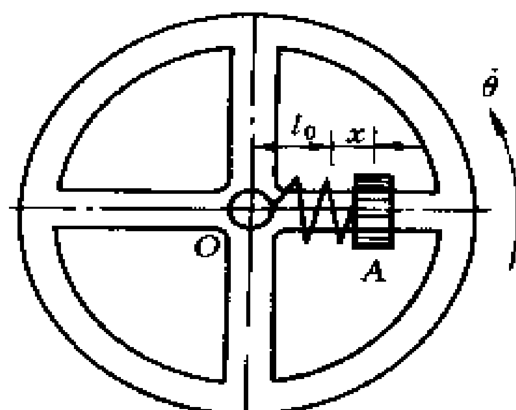
6－22 飞轮在水平面内绕铅垂轴转动。轮辐上套一质量为m的滑块A，并用一劲度系数为k的弹簧与轴心相连，如题6－22图所示。已知飞轮的转动惯量为J_0，弹簧原长为l_0，试用罗司方程(以飞轮转角θ和弹簧伸长x为广义坐标)写出系统的运动微分方程，并求循环坐标的运动方程。

6－23 两相同质量的滑块与弹簧和阻尼器相联，如题6－23图

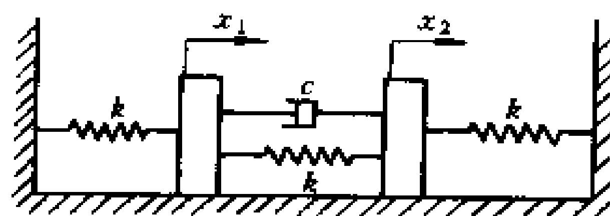
所示。已知弹簧劲度系数为 k，阻尼器的阻尼系数为 c，所提供的阻尼与相对速度大小成正比。试写出系统的耗散函数及运动微分方程。



题 6－21 图



题 6－22 图



题 6－23 图

第7章　哈密顿正则方程

7.1　哈密顿正则方程

7.1.1　保守系统的情形

拉格朗日方程是用一组关于 k 个广义坐标 q_j 的二阶常微分方程组来描述系统的运动。方程的建立完全依赖于以$(q_j, \dot{q}_j, t)$为变量的拉格朗日函数 L，即 $L = L(q_1, q_2, \cdots, q_k, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_k, t)$，变量$(q_j, \dot{q}_j, t)$称为**拉格朗日变量**。哈密顿以广义动量 p_j 取代广义速度 $\dot{q}_j$，以(q_j, p_j, t)为变量，称为**哈密顿变量或正则变量**。以哈密顿函数 H 代替拉格朗日函数 L，用 $2k$ 个关于广义坐标 q_j 和广义动量 p_j 为变量对称整齐的一阶常微分方程组，即称为哈密顿正则方程或简称正则方程，以此来描述系统的运动。下面用哈密顿原理导出系统的哈密顿正则方程。

首先，利用勒让德变换把以$(q_j, \dot{q}_j, t)$为变量的拉格朗日函数 L 变换成以(q_j, p_j, t)为新变量的哈密顿函数 H。显然，新变量 p_j 代替旧变量 $\dot{q}_j$ 参与变换，而同时保留变量 q_j 及 t。

根据对原变量进行部分替换的勒让德变换式(6.4.6)，可得哈密顿函数

$$H = \sum_{j=1}^{k} p_j \dot{q}_j - L \tag{7.1.1}$$

因此，拉格朗日函数 $L = \sum_{j=1}^{k} p_j \dot{q}_j - H$ 代入哈密顿原理(式(5.1.8))，即

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \delta\left(\sum_{j=1}^{k} p_j \dot{q}_j - H\right)\mathrm{d}t = 0 \tag{7.1.2}$$

对上式进行变分运算，得

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=1}^{k}\left(p_j\delta\dot{q}_j+\dot{q}_j\delta p_j-\frac{\partial H}{\partial p_j}\delta p_j-\frac{\partial H}{\partial q_j}\delta q_j\right)\mathrm{d}t=0 \quad (7.1.3)$$

将上式中第一项改写成如下形式，即

$$\sum_{j=1}^{k}p_j\delta\dot{q}_j=\sum_{j=1}^{k}\left[p_j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_j)\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{j=1}^{k}p_j\delta q_j\right)-\sum_{j=1}^{k}\dot{p}_j\delta q_j$$

代入式(7.1.3)，有

$$\sum_{j=1}^{k}p_j\delta q_j\Big|_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=1}^{k}\left[\left(\dot{q}_j-\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)\delta p_j-\left(\dot{p}_j+\frac{\partial H}{\partial q_j}\right)\delta q_j\right]\mathrm{d}t=0 \quad (7.1.4)$$

因为系统在始末位置是确定的，则有

$$\delta q_j(t_0)=0,\quad \delta q_j(t_1)=0 \quad (7.1.5)$$

于是有

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=1}^{k}\left[\left(\dot{q}_j-\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)\delta p_j-\left(\dot{p}_j+\frac{\partial H}{\partial q_j}\right)\delta q_j\right]\mathrm{d}t=0 \quad (7.1.6)$$

根据广义动量的定义 $p_j=\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}$，由勒让德变换可得

$$\dot{q}_j=\frac{\partial H}{\partial p_j} \quad (7.1.7)$$

因此式(7.1.6)成为

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=1}^{k}\left[-\left(\dot{p}_j+\frac{\partial H}{\partial q_j}\right)\delta q_j\right]\mathrm{d}t=0 \quad (7.1.8)$$

对于完整系统，由于 δq_j 是相互独立的，且可任意取值，因此欲使上式成立，必有

$$\dot{p}_j=-\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (7.1.9)$$

联立式(7.1.7)和式(7.1.9)，即得关于变量(q_j,p_j,t)的哈密顿正则方程

$$\left.\begin{aligned}\dot{q}_j&=\frac{\partial H}{\partial p_j}\\ \dot{p}_j&=-\frac{\partial H}{\partial q_j}\end{aligned}\right\}\quad (j=1,2,\cdots,k) \quad (7.1.10)$$

把运动方程的拉格朗日形式和哈密顿形式加以对比，可以看到，无论是拉格朗日函数$L(q_j, \dot{q}_j, t)$还是哈密顿函数$H(q_j, p_j, t)$，都可看作是系统的描述函数。更确切地说，拉格朗日函数$L(q_j, \dot{q}_j, t)$包含了位形空间中描述系统运动的全部特征，而哈密顿函数$H(q_j, p_j, t)$则包含了相空间中描述系统运动的全部特征。因此，可以说哈密顿原理、哈密顿正则方程和拉格朗日方程是互为等价的。

需要指出的是，正则方程式(7.1.10)中的第一组k个方程是从纯数学意义上的勒让德变换而得来，并不是来自于哈密顿原理，所以，它不代表系统运动所遵循的动力学规律，它表示的是变量之间的变换关系。而第二组方程则是应用哈密顿原理而得到的，因而它反映了系统所应遵循的动力学规律。将这二组方程结合在一起，形成一对完全对称整齐且变量具有同等地位的$2k$个一阶方程组，这一特点不仅在动力学系统的理论研究方面（例如非线性动力系统的研究）比拉格朗日方程更具优越性，而且为现代量子力学和统计力学等的研究提供了便利的理论基础。

现在讨论哈密顿函数的物理意义。

为改写

$$H = \sum_{j=1}^{k} p_j \dot{q}_j - L$$

中的第一项，将广义动量的定义 $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$代人，并利用欧拉齐次函数定理，有

$$H = (2L_2 + L_1) - (L_2 + L_1 + L_0)$$

根据式(6.3.10)知，上式可以写成

$$H = T_2 - T_0 + V \tag{7.1.11}$$

与广义能量的表达式对照可知，哈密顿函数与广义能量相同。

如果是保守系统，则 $T = T_2$，$T_0 = 0$，因此

$$H = T + V \tag{7.1.12}$$

亦即哈密顿函数等于系统的总机械能。

再来讨论哈密顿函数对时间t的导数。将H对时间t求导

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j}\dot{p}_j\right) + \frac{\partial H}{\partial t}$$

将式(7.1.10)代入上式，得

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{7.1.13}$$

由此可知，哈密顿函数 H 对时间 t 的偏导数等于 H 对时间 t 的全导数。即表明，哈密顿函数 H 随时间 t 的变化与系统的状态变量 q_j、p_j ($j=1, 2, \cdots, k$) 无关，只与 H 是否显含时间 t 有关。

7.1.2 非保守系统的情形

系统除有势力以外还存在非有势力作用的情形。在哈密顿原理的一般形式

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T + \delta W)\mathrm{d}t = 0 \tag{7.1.14}$$

中，系统的所有主动力的虚功 δW 可写成如下形式：

$$\delta W = -\delta V + \sum_{j=1}^{k} Q'_j \delta q_j$$

其中，$-\delta V$ 和 $\sum_{j=1}^{k} Q'_j \delta q_j$ 分别表示有势力和非有势力的虚功。将上式代入式(7.1.14)，得

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta T - \delta V + \sum_{j=1}^{k} Q'_j \delta q_j\right)\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1}\left(\delta L + \sum_{j=1}^{k} Q'_j \delta q_j\right)\mathrm{d}t$$

将 $L = \sum_{j=1}^{k} p_j \dot{q}_j - H$ 代入上式，并进行变分运算，得

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=1}^{k}\left(p_j \delta\dot{q}_j + \dot{q}_j \delta p_j - \frac{\partial H}{\partial p_j}\delta p_j - \frac{\partial H}{\partial q_j}\delta q_j + Q'_j \delta q_j\right)\mathrm{d}t = 0$$

利用式(7.1.4)和式(7.1.5)有

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=1}^{k}\left[\left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j}\right)\delta p_j - \left(\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} - Q'_j\right)\delta q_j\right]\mathrm{d}t = 0$$

采用与前面同样的作法，即可得到存在非有势力作用时的哈密顿正则

方程

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} + Q'_j \qquad (j = 1, 2, \cdots, k) \qquad (7.1.15)$$

式中 Q'_j 为系统的非有势力对应于 q_j 的广义力。

例 7－1 试用哈密顿正则方程求出水平弹簧质量振动系统的运动微分方程。

解： 设质量为 m，弹簧劲度系数为 k，如图 7－1－1 所示，该系统为一个自由度的保守系统。

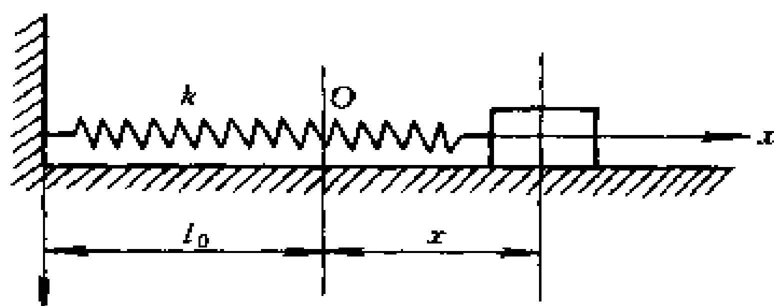


图 7－1－1

取弹簧等于原长 l_0 时，质量位置 O 为 x 坐标轴的原点，取 x 为广义坐标，如势能零点取在弹簧原长位置，则系统的势能 $V = \frac{1}{2}kx^2$，因此系统的拉格朗日函数

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

求得广义动量

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

因此

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}$$

计算哈密顿函数 H，并把它写成广义动量和广义坐标的函数

$$H = p_x\dot{x} - L = p_x\dot{x} - \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2\right) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

可以看出，由于是保守系统，故 $H = T + V$ 代表系统的机械能量，求得 H 后，按式(7.1.10)写出系统的正则方程

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx$$

由上二式消去 p_x，得到系统运动微分方程

$$mx + kx = 0$$

例 7－2 水平直管以匀角速度 ω 绕铅直轴旋转。管内放有用弹簧相联的两相同质量 m 的小球。小球可沿直管无摩擦地滑动。已知弹簧劲度系数为 k，原长为 l，试写出系统的哈密顿正则运动方程。小球尺寸略去不计。

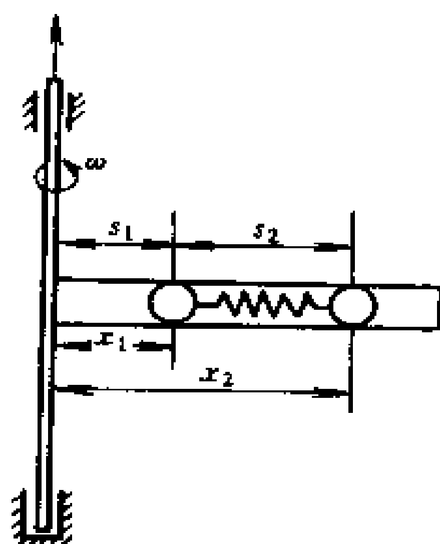


图 7－1－2

解：直管是加于系统的动约束。取小球相对于直管的坐标 x_1 和 x_2 为独立的广义坐标，如图 7－1－2 所示。系统是两自由度的完整系统，小球所受的主动力均为有势力（重力和弹性力），故可应用正则方程式(7.1.10)。

先来构成系统的哈密顿函数。已知总动能

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + x_1^2\omega^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + x_2^2\omega^2) \tag{a}$$

势能

$$V = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - l)^2 \tag{b}$$

拉格朗日函数

$$L = T - V = \frac{1}{2}m[\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \omega^2(x_1^2 + x_2^2)] - \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - l)^2 \tag{c}$$

可以算出各广义动量

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m\dot{x}_1, \qquad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2 \tag{d}$$

故有

$$\dot{x}_1 = \frac{p_1}{m}, \qquad \dot{x}_2 = \frac{p_2}{m} \tag{e}$$

于是可以写出系统的哈密顿函数

$$H = p_1\dot{x}_1 + p_2\dot{x}_2 - \frac{m}{2}[\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \omega^2(x_1^2 + x_2^2)] + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - l)^2 \tag{f}$$

以正则变量表示，有

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{1}{2}m\omega^2(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - l)^2 \tag{g}$$

根据式(7.1.10)，可以写出系统的正则运动方程

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}_1 = \dfrac{p_1}{m}, \quad \dot{x}_2 = \dfrac{p_2}{m} \\ \dot{p}_1 = m\omega^2 x_1 + k(x_2 - x_1 - l), \dot{p}_2 = m\omega^2 x_2 - k(x_2 - x_1 - l) \end{array}\right\} \tag{h}$$

这是一组关于正则变量(x_1, x_2, p_1, p_2)的一阶常微分方程。在给定运动初始条件$(x_1^0, x_2^0, p_1^0, p_2^0)$以后，不难解出各正则变量作为时间 t 的函数。

系统虽然受非定常约束，但 H 中并不显含 t，故有广义能量积分 $T_2 - T_0 + V = h$，它是正则方程组(h)的一个首次积分。这里，h 的值决定于系统的运动初始条件。令式(g)右端等于 h 就得到这个首次积分的表示式。有关正则方程的首次积分，将在下一节中作详细讨论。

7.2 哈密顿正则方程的首次积分

如同拉格朗日方程的求解一样，降低方程的阶数和维数是简化方程以便于求解的重要途径之一，而系统的首次积分是方程降阶和降维的基础。因此对于正则方程而言，同样需要讨论首次积分的问题。现在分析能直接求出首次积分的几种情况。

7.2.1 能量积分

哈密顿函数 H 不显含时间 t，即$\dfrac{\partial H}{\partial t} = 0$ 的情况。由式(7.1.13)

可得

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial t}=0$$

积分上式则有 $H=h$（常量），由式(7.1.11)知哈密顿函数可写成

$$H=T_2-T_0+V$$

于是哈密顿正则方程的**能量积分**为

$$H=T_2-T_0+V=h \tag{7.2.1}$$

如果是保守系统，则 $T=T_2$，$T_0=0$，因此

$$H=T+V=h \tag{7.2.2}$$

亦即能量积分等于系统的总机械能。

7.2.2 循环积分

根据哈密顿函数的定义

$$H(q,p,t)=\sum_{j=1}^{k}p_j\dot{q}_j(q,p,t)-L[q,\dot{q}(q,p,t),t]$$

对某一广义坐标 q_l 求偏微分，得

$$\frac{\partial H}{\partial q_l}=\sum_{j=1}^{k}p_j\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_l}-\left[\frac{\partial L}{\partial q_l}+\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_l}\right]$$

将广义动量的定义 $p_j=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$代入上式，于是得

$$\frac{\partial H}{\partial q_l}=-\frac{\partial L}{\partial q_l} \tag{7.2.3}$$

因此，如果在拉格朗日函数中存在某些循环坐标 q_l，则在哈密顿函数中有相同的循环坐标 q_l 存在。

设 q_1，q_2，…，q_l（$l<k$）为循环坐标，根据循环坐标的定义，$q_i(i=1,2,\cdots,l)$不显含在拉格朗日函数中。由上述结论，则哈密顿函数可表示为

$$H=H(q_{l+1},q_{l+2},\cdots,q_k,p_1,p_2,\cdots,p_k,t)$$

根据正则方程有

$$\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}=0 \qquad (i=1,2,\cdots,l) \tag{7.2.4}$$

于是得 l 个循环积分

$$p_i = C_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, l) \tag{7.2.5}$$

利用循环坐标可对哈密顿正则方程进行降维，将上式代入哈密顿函数得

$$H = H(q_{l+1}, q_{l+2}, \cdots, q_k, C_1, C_2, \cdots, C_l, p_{l+1}, p_{l+2}, \cdots, p_k, t) \tag{7.2.6}$$

此时哈密顿正则方程为

$$\begin{aligned} q_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j} \\ p_j &= -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = l+1, l+2, \cdots, k) \end{aligned} \tag{7.2.7}$$

对于循环坐标，有

$$\dot{q}_i = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)_{p_i \to C_i} (i = 1, 2, \cdots, l)$$

积分上式，得

$$q_i = \int \frac{\partial H}{\partial p_i} \mathrm{d}t + C'_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, l) \tag{7.2.8}$$

式中 C'_i 为积分常数。

由此可见，若系统存在 l 个循环坐标，则哈密顿正则方程可从原 $2k$ 个减少到$(2k - 2l)$个。因此，对于一个力学系统，希望能找到尽可能多的循环坐标，循环坐标越多，对于方程的求解就越有利。

7.2.3 H 中不显含某些广义动量的情况

设 p_1，p_2，…，p_l $(l < k)$不显含在 H 中，则哈密顿函数可表示为

$$H = H(q_1, q_2, \cdots, q_k, p_{l+1}, p_{l+2}, \cdots, p_k, t) \tag{7.2.9}$$

则

$$\begin{aligned} q_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, l) \\ q_i &= C_i \end{aligned} \tag{7.2.10}$$

将式(7.2.10)代入式(7.2.9)得

$$H = H(C_1, C_2, \cdots C_l, q_{l+1}, q_{l+2}, \cdots, q_k, p_{l+1}, p_{l+2}, \cdots, p_k, t)$$

将上式与式(7.2.6)比较，可知此情况同样可将原来 $2k$ 个一阶微分方程降为$(2k-2l)$个。

例 7－3 空心圆管 OA 绕铅垂轴 O 在水平面内转动。它对 O 轴的转动惯量 $J_0 = md^2$，质量为 m 的质点 M 在圆管内运动，设质点受引力 $F_r = -\frac{\mu m}{r^2}$的作用，式中 r 是质点到转轴 O 点的矢径，μ 是常数，如图 7－2－1 所示。试列出系统的哈密顿正则方程并求首次积分。

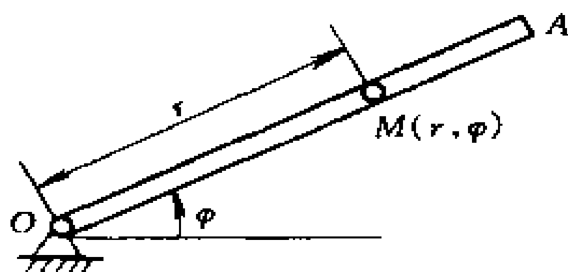


图 7－2－1

解： 系统有两个自由度，选极坐标 r、φ 为广义坐标，则系统动能

$$T = \frac{1}{2}J_0\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + (r^2 + d^2)\dot{\varphi}^2] \tag{a}$$

广义动量为

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r},\ p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m(r^2 + d^2)\dot{\varphi} \tag{b}$$

因系统为保守系统，则哈密顿函数

$$H = T + V = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2 + d^2}\right) - \frac{\mu m}{r} \tag{c}$$

代入正则方程，得到

$$\left.\begin{aligned} &\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{m(r^2 + d^2)} \\ &\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{rp_\varphi^2}{m(r^2 + d^2)^2} - \frac{\mu m}{r^2},\ \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{d}$$

由式(c)可知，φ 为循环坐标，则存在循环积分，即广义动量守恒，有

$$p_\varphi = m(r^2 + d^2)\dot{\varphi} = 常量$$

又因$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$，则存在广义能量积分，即机械能守恒，有

$$\frac{1}{2m}(p_r^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2+d^2})-\frac{\mu m}{r}=h$$

7.3 泊松括号 泊松定理

从上一节的讨论可以看到，系统的首次积分为方程的求解提供了方便。因此，尽可能多地找出系统的首次积分是我们感兴趣的问题之一。本节将讨论利用泊松方法，从已求出的首次积分中去寻找新的首次积分。

7.3.1 泊松括号

设 φ、ψ 是 q_1，q_2，…，q_k，p_1，p_2，…，p_k，t 的函数，即

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=\varphi(q_j,p_j,t)\\ \psi&=\psi(q_j,p_j,t)\end{aligned}\quad (j=1,2,\cdots,k)\right\}\tag{7.3.1}$$

则泊松括号(φ,ψ)定义为

$$(\varphi,\psi)=\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_j}\frac{\partial\psi}{\partial p_j}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_j}\frac{\partial\psi}{\partial q_j}\right)\tag{7.3.2}$$

根据泊松括号的定义，可以得到如下重要性质。

(1) 常数 C 与任意函数 φ 所组成的泊松括号为零，即

$$(C,\varphi)=-(\varphi,C)=0\tag{7.3.3}$$

(2) 两个相同函数所组成的泊松括号为零，即

$$(\varphi,\varphi)=(\psi,\psi)=0\tag{7.3.4}$$

(3) 组成泊松括号的两个函数交换顺序，则与原来的差一个负号。即

$$(\varphi,\psi)=-(\psi,\varphi)\tag{7.3.5}$$

(4) $$(\varphi,-\psi)=-(\varphi,\psi);(-\varphi,\psi)=-(\varphi,\psi)\tag{7.3.6}$$

(5) $$(q_i,p_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1,当\ i=j\\0,当\ i\neq j\end{cases}\tag{7.3.7}$$

(6) 若 $$\varphi=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i\tag{7.3.8}$$

则

$$\left.\begin{aligned}(\varphi,\psi)&=\sum_{i=1}^{n}(\varphi_i,\psi)\\(\psi,\varphi)&=\sum_{i=1}^{n}(\psi,\varphi_i)\end{aligned}\right\}\tag{7.3.9}$$

(7) 泊松括号服从代数分配律，即

$$(\varphi,\psi_1+\psi_2)=(\varphi,\psi_1)+(\varphi,\psi_2)\tag{7.3.10}$$

(8) $(\varphi,\psi_1\psi_2)=(\varphi,\psi_1)\psi_2+(\varphi,\psi_2)\psi_1$ (7.3.11)

(9) $\frac{\partial}{\partial t}(\varphi,\psi)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t},\psi\right)+\left(\varphi,\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$ (7.3.12)

(10) 如果$\vartheta=\vartheta(q_j,p_j,t)(j=1,2,\cdots,k)$，则有泊松恒等式或雅可比恒等式

$$(\vartheta,(\varphi,\psi))+(\varphi,(\psi,\vartheta))+(\psi,(\vartheta,\varphi))\equiv0\tag{7.3.13}$$

以上性质(1)～(5)是显而易见的，性质(6)～(9)作为习题由读者自证。下面我们给出性质(10)的证明。

根据泊松括号的定义和性质(9)，首先计算恒等式中第一项，即

$$(\vartheta,(\varphi,\psi))=\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{\partial\vartheta}{\partial q_j}\frac{\partial}{\partial p_j}(\varphi,\psi)-\frac{\partial\vartheta}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial q_j}(\varphi,\psi)\right]$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\left\{\frac{\partial\vartheta}{\partial q_j}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_j},\psi\right)+\left(\varphi,\frac{\partial\psi}{\partial p_j}\right)\right]-\frac{\partial\vartheta}{\partial p_j}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_j},\psi\right)+\left(\varphi,\frac{\partial\psi}{\partial q_j}\right)\right]\right\}$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\left\{\frac{\partial\vartheta}{\partial q_j}\left[\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_j\partial q_j}\frac{\partial\psi}{\partial p_j}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_j^2}\frac{\partial\psi}{\partial q_j}\right)+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_j}\frac{\partial^2\psi}{\partial p_j^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_j}\frac{\partial^2\psi}{\partial p_j\partial q_j}\right)\right]\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\vartheta}{\partial p_j}\left[\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_j^2}\frac{\partial\psi}{\partial p_j}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_j\partial p_j}\frac{\partial\psi}{\partial q_j}\right)+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_j}\frac{\partial^2\psi}{\partial q_j\partial p_j}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_j}\frac{\partial^2\psi}{\partial q_j^2}\right)\right]\right\}$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\left\{\frac{\partial\vartheta}{\partial q_j}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_j\partial q_j}\frac{\partial\psi}{\partial p_j}-\frac{\partial\vartheta}{\partial q_j}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_j^2}\frac{\partial\psi}{\partial q_j}+\frac{\partial\vartheta}{\partial q_j}\frac{\partial\varphi}{\partial q_j}\frac{\partial^2\psi}{\partial p_j^2}-\frac{\partial\vartheta}{\partial q_j}\frac{\partial\varphi}{\partial p_j}\frac{\partial^2\psi}{\partial p_j\partial q_j}\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\vartheta}{\partial p_j}\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_j^2}\frac{\partial\psi}{\partial p_j}+\frac{\partial\vartheta}{\partial p_j}\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_j\partial p_j}\frac{\partial\psi}{\partial q_j}-\frac{\partial\vartheta}{\partial p_j}\frac{\partial\varphi}{\partial q_j}\frac{\partial^2\psi}{\partial q_j\partial p_j}+\frac{\partial\vartheta}{\partial p_j}\frac{\partial\varphi}{\partial p_j}\frac{\partial^2\psi}{\partial q_j^2}\right\}$$

只需将上式中ϑ、φ、ψ进行轮换，就可求出恒等式中的第二、三项，将所有展开项相加后，即可得证。

7.3.2 用泊松括号表示的正则方程

根据泊松括号的定义，有

$$(p_j, H) = \sum_{\nu=1}^{k}\left(\frac{\partial p_j}{\partial q_\nu}\frac{\partial H}{\partial p_\nu} - \frac{\partial p_j}{\partial p_\nu}\frac{\partial H}{\partial q_\nu}\right) \tag{7.3.14}$$

其中

$$\frac{\partial p_j}{\partial q_\nu} = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, k), \frac{\partial p_j}{\partial p_\nu} = \delta_{j\nu} = \begin{cases} 1, 当\ \nu = j \\ 0, 当\ \nu \neq j \end{cases} \tag{7.3.15}$$

因此

$$(p_j, H) = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \tag{7.3.16}$$

同理可得

$$(q_j, H) = \frac{\partial H}{\partial p_j} \tag{7.3.17}$$

当一完整系统受有势力作用时，其正则方程为

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \cdots, k) \tag{7.3.18}$$

将式(7.3.16)和式(7.3.17)代入，于是得到用泊松括号表示的正则方程，即

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}_j &= (q_j, H) \\ \dot{p}_j &= (p_j, H) \end{aligned}\right\} \quad (j = 1, 2, \cdots, k) \tag{7.3.19}$$

显然，正则变量 q_j、p_j 在数学上处于完全相同的地位。

如果已求出系统的首次积分为

$$f(q_1, q_2, \cdots, q_k, p_1, p_2, \cdots, p_k, t) = C \tag{7.3.20}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t}\right) = 0 \tag{7.3.21}$$

由于首次积分为正则方程的一个解，因而式(7.3.21)中的变量 q_j、p_j 都满足正则方程，将正则方程代入，得

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}-\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\right)=0 \tag{7.3.22}$$

利用泊松括号，则上式可写成

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(f,H)=0 \tag{7.3.23}$$

上式即为正则方程的首次积分所应满足的充分必要条件。如果 f 不显含时间 t，则式(7.3.23)成为

$$(f,H)=0 \tag{7.3.24}$$

由此可见，利用泊松括号可以判别系统的首次积分，反之也提供了求正则方程首次积分的方法。

例 7－4 质量为 m 的质点 M 在稳定有势力场中运动，其势能函数 $V=V(x,y,z)$，试求它对直角坐标系 $Oxyz$ 的三轴的动量矩 L_x、L_y、L_z 与哈密顿函数 H 所构成的泊松括号：$(L_x,\ H)$，$(L_y,\ H)$，$(L_z,\ H)$。

解：取 x、y、z 为广义坐标，因为是保守系统，哈密顿函数 $H=T+V$，而广义动量

$$p_x=m\dot{x},\quad p_y=m\dot{y},\quad p_z=m\dot{z}$$

所以

$$\begin{aligned}H&=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+V(x,y,z)\\&=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+V(x,y,z)\end{aligned}$$

而此质点的动量矩

$$L_x=ym\dot{z}-zm\dot{y}=yp_z-zp_y$$

代入式(7.3.2)得

$$\begin{aligned}(L_x,H)&=\frac{\partial L_x}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p_x}-\frac{\partial L_x}{\partial p_x}\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial L_x}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial p_y}-\frac{\partial L_x}{\partial p_y}\frac{\partial H}{\partial y}\\&\quad+\frac{\partial L_x}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial p_z}-\frac{\partial L_x}{\partial p_z}\frac{\partial H}{\partial z}\\&=0-0+\frac{1}{m}p_yp_z+\frac{\partial V}{\partial y}z-\frac{1}{m}p_yp_z-\frac{\partial V}{\partial z}y\end{aligned}$$

即

$$(L_x, H) = \frac{\partial V}{\partial y} z - \frac{\partial V}{\partial z} y$$

因为对于广义坐标 x、y、z 的广义力 F_x、F_y、F_z 与势能函数 V 有如下关系

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

这样

$$(L_x, H) = -zF_y + yF_z = m_x(\boldsymbol{F})$$

同理可得

$$(L_y, H) = m_y(\boldsymbol{F})$$

$$(L_z, H) = m_z(\boldsymbol{F})$$

式中 $m_x(\boldsymbol{F})$、$m_y(\boldsymbol{F})$、$m_z(\boldsymbol{F})$分别为有势力 $\boldsymbol{F}$ 对 x、y、z 三轴的力矩。如果有势力 $\boldsymbol{F}$ 是有心力，并令坐标原点取在力心，则

$$m_x(\boldsymbol{F}) = 0, \quad m_y(\boldsymbol{F}) = 0, \quad m_z(\boldsymbol{F}) = 0$$

因此

$$(L_x, H) = 0, \quad (L_y, H) = 0, \quad (L_z, H) = 0$$

按式(7.3.24)可知

$$L_x = C_1, \quad L_y = C_2, \quad L_z = C_3$$

为正则方程的首次积分，即质点 M 在运动过程中 L_x、L_y、L_z都保持恒量，这实际上就是熟知的质点在有心力作用下运动时，对力心的动量矩在三个直角坐标轴方向分别守恒。

7.3.3 泊松定理

已知函数 $\varphi(q_1, q_2, \cdots, q_k, p_1, p_2, \cdots, p_k, t) = C_1$ 和函数 $\psi(q_1, q_2, \cdots, q_k, p_1, p_2, \cdots, p_k, t) = C_2$ 是正则方程的首次积分，则函数$(\varphi, \psi) = C_3$ 也是它的首次积分。(φ, ψ)为函数 φ 及 ψ 所构成的泊松括号。这就是**泊松定理**，又称**雅可毕-泊松定理**。

证明：已知 $\varphi(q_1, q_2, \cdots, q_k, p_1, p_2, \cdots, p_k, t) = C_1$ 和 $\psi(q_1, q_2,$

$\cdots, q_k, p_1, p_2, \cdots, p_k, t) = C_2$ 是正则方程的首次积分。因此，满足式(7.3.23)，即

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\varphi, H) = 0, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\psi, H) = 0$$

因此有

$$(\varphi, H) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \qquad (\psi, H) = -\frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{7.3.25}$$

由函数 H、φ、ψ 构成的泊松恒等式为

$$(H, (\varphi, \psi)) + (\varphi, (\psi, H)) + (\psi, (H, \varphi)) \equiv 0 \tag{7.3.26}$$

将式(7.3.25)代入上式，并利用泊松括号的性质(3)和性质(4)得

$$(H, (\varphi, \psi)) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, \varphi\right) + \left(\psi, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \equiv 0$$

再利用性质(9)合并上式中的后两项及性质(3)，则有

$$((\varphi, \psi), H) + \frac{\partial}{\partial t}(\varphi, \psi) = 0$$

由式(7.3.23)可知，$(\varphi, \psi) = C_3$ 也是正则方程的首次积分。定理得证。

若系统存在能量积分 $H = h$，且已知另一首次积分 $\varphi(q_j, p_j, t) = C$，则由泊松定理可得$(\varphi, H) = C_1$ 也是正则方程的首次积分。

因此，$\varphi(q_j, p_j, t) = C$ 满足式(7.3.23)，有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\varphi, H) = 0$$

即

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -(\varphi, H) = -C_1$$

上式说明，若系统存在能量积分，则正则方程的首次积分对时间的导数$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = C_2$ 亦是其首次积分；推广下去，函数$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = C_3$，$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} = C_4$，…也都是首次积分。

值得注意的是，应用泊松定理求解首次积分时，似乎只要已知正

则方程的两个首次积分，便可连续应用泊松定理求出正则方程的全部首次积分，但事实并非如此。因为用这样的方法得到的积分常常为原积分的线性组合或恒等式，不是独立的，因此，不能由它再求出新的首次积分。再者，如果$(\varphi,\psi)\equiv 0$时，也不可能得到新的积分。

设f_1，f_2，…，f_s是正则变量q_j、p_j的函数，它们是正则方程的一组首次积分。若

$$(f_\nu, f_\mu)=0 \qquad (\nu,\mu=1,2,\cdots,s)$$

那么不能由这组首次积分得到新的首次积分，称这样的一组积分为**内旋积分系**。例如，不受力作用的自由质点，它的能量积分和三个动量积分成为内旋积分系。

例 7－5 质量为m的质点M，受有心力的作用，如取力心为坐标原点O，则质点运动时对Ox及Oy轴的动量矩守恒，试用泊松定理证明质点M对Oz轴的动量矩也守恒。

证明： 取质点M的直角坐标x、y、z为广义坐标，按质点对Ox轴及Oy轴动量矩守恒条件，得到它的正则方程的二个首次积分

$$L_x = ym\dot{z} - zm\dot{y} = yp_z - zp_y = a$$

$$L_y = zm\dot{x} - xm\dot{z} = zp_x - xp_z = b$$

式中L_x、L_y分别表示质点对x轴和y轴的动量矩，根据泊松定理知，$(L_x, L_y)=C$必定是其首次积分，即

$$\begin{aligned}(L_x,L_y) &= \frac{\partial L_x}{\partial x}\frac{\partial L_y}{\partial p_x} - \frac{\partial L_x}{\partial p_x}\frac{\partial L_y}{\partial x} + \frac{\partial L_x}{\partial y}\frac{\partial L_y}{\partial p_y} - \frac{\partial L_x}{\partial p_y}\frac{\partial L_y}{\partial y} \\ &\quad + \frac{\partial L_x}{\partial z}\frac{\partial L_y}{\partial p_z} - \frac{\partial L_x}{\partial p_z}\frac{\partial L_y}{\partial z} \\ &= xp_y - yp_x = L_z\end{aligned}$$

L_z为质点M对Oz轴的动量矩，因此证明$L_z=C$，即质点M对Oz轴的动量矩守恒。

7.4 正则变换

对于一般的力学系统，由正则方程建立起来的系统运动微分方程往往是非线性的。而非线性微分方程的求解具有较大的困难，一直是

人们研究的重要课题。从上两节可知，若系统存在 l 个循环坐标，则哈密顿正则方程可从原 $2k$ 个减少到 $(2k-2l)$ 个，并可以得到 l 个首次积分，这就为方程的求解提供了有效的方法。因此，系统中存在更多的循环坐标对于方程的求解有着重要的意义。正则变换的目的就在于通过变换寻找新的哈密顿函数，使其具有更简洁的形式和更多的循环坐标，也意味着能得到系统更多的首次积分，且保持正则方程的形式不变。

7.4.1 正则变换

描述一个力学系统可以采用不同的广义坐标。如 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 和 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$，而二者之间存在一定的变换关系，即

$$Q_j = Q_j(q_1, q_2, \cdots, q_k, t) \qquad (j=1,2,\cdots,k) \tag{7.4.1}$$

上述变换是将一组旧广义坐标 q_1，q_2，$\cdots$，q_k 所确定的位形空间中的一个点，变换到一组新广义坐标 Q_1，Q_2，$\cdots$，Q_k 所确定的位形空间中的一个点。因此，这种变换称为**点变换**。对一个力学系统来说，描述它的拉格朗日方程是不会随此系统广义坐标的选择不同而改变它的形式的。因此，点变换不会影响拉格朗日方程的结构。

在哈密顿正则方程中，是以正则变量 (q_j, p_j, t) $(j=1,2,\cdots,k)$ 来描述系统的运动的，即

$$\left.\begin{aligned}\dot{q}_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j}\\ \dot{p}_j &= -\frac{\partial H}{\partial q_j}\end{aligned}\right\} \qquad (j=1,2,\cdots,k) \tag{7.4.2}$$

也就是说，除了广义坐标 q 以外，还有广义动量 p 也被看作是独立变量。因此，新旧变量之间的变换包含了广义坐标和广义动量。可以把一组旧变量 q_j、p_j 变换到一组新变量 Q_j、P_j 之间的变换方程写成

$$\left.\begin{aligned}Q_j &= Q_j(q_1, q_2, \cdots, q_k, p_1, p_2, \cdots, p_k, t)\\ P_j &= P_j(q_1, q_2, \cdots, q_k, p_1, p_2, \cdots, p_k, t)\end{aligned}\right\} \qquad (j=1,2,\cdots,k) \tag{7.4.3}$$

通过上述变换，使旧的哈密顿函数 $H=H(q,p,t)$ 变换到新的哈密顿函数 $H^* = (Q,P,t)$，且保持正则方程的形式不变，即

$$\left.\begin{aligned}\dot{Q}_j &= \frac{\partial H^*}{\partial P_j} \\ \dot{P}_j &= -\frac{\partial H^*}{\partial Q_j}\end{aligned}\right\} \quad (j=1,2,\cdots,k) \tag{7.4.4}$$

这种变换(式(7.4.3))称为**正则变换**。变量 Q、P 仍称为**正则变量或共轭变量**。显然，这样的变换定义了相空间之间的变换。然而相空间的变换与点变换不同，并不是所有的变换都是正则变换，而非正则变换并非所需。进行变换的目的是要求变换后的哈密顿函数的形式更加简洁，并含有更多的循环坐标，且由新变量表示的运动方程仍然具有正则方程简单、对称的形式。因此，如何建立正则变换，或者说两组变量需满足什么条件才能实现正则变换，这是本节需要着重讨论的问题。

如何保证变换后变量所确定的运动方程仍然具有正则方程的形式呢？正则方程可以从哈密顿原理导出，因此，新的正则变量 Q、P 亦应满足哈密顿原理，即对于一个 k 自由度的完整系统，受有势力作用，根据哈密顿原理，新旧两组正则变量都应满足式(5.1.8)，即

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{j=1}^{k} p_j\dot{q}_j - H(q,p,t)\right]\mathrm{d}t = 0 \tag{7.4.5}$$

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{j=1}^{k} P_j\dot{Q}_j - H^*(Q,P,t)\right]\mathrm{d}t = 0 \tag{7.4.6}$$

当式(7.4.5)和式(7.4.6)同时成立时，两式中的被积函数并非完全相等，可以相差一任意函数 F 对时间 t 的全导数。因为，如设 F 是 q、Q 和 t 的函数，即

$$F = F(q_j, Q_j, t) \quad (j=1,2,\cdots,k) \tag{7.4.7}$$

计算下式，并注意到系统在始末位置是确定的，则

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \delta F[q_j(t_1), Q_j(t_1), t_1] - \delta F[q_j(t_0), Q_j(t_0), t_0] = 0$$

于是，要使式(7.4.5)和式(7.4.6)同时满足，其被积函数之间可以写成如下关系：

$$\left(\sum_{j=1}^{k} p_j\mathrm{d}q_j - H\mathrm{d}t\right) - \left(\sum_{j=1}^{k} P_j\mathrm{d}Q_j - H^*\mathrm{d}t\right) = \mathrm{d}F \tag{7.4.8}$$

由此得到变换式(7.4.3)为正则变换的充分必要条件是变换式使得两个微分式($\sum_{j=1}^{k} p_j \mathrm{d}q_j - H\mathrm{d}t$)与($\sum_{j=1}^{k} P_j \mathrm{d}Q_j - H^* \mathrm{d}t$)的差等于某个函数 $F(q,Q,t)$的全微分。

将上式改写成

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k} p_j \mathrm{d}q_j - \sum_{j=1}^{k} P_j \mathrm{d}Q_j + (H^* - H)\mathrm{d}t \\
&= \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial Q_j} \mathrm{d}Q_j + \frac{\partial F}{\partial t} \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

比较各项的系数，即可得到如下变换关系

$$
\left.
\begin{aligned}
p_j &= \frac{\partial F}{\partial q_j} \\
P_j &= -\frac{\partial F}{\partial Q_j} \\
H^* &= H + \frac{\partial F}{\partial t}
\end{aligned}
\right\} (j = 1, 2, \cdots, k) \tag{7.4.9}
$$

式(7.4.9)的前两组方程给出了两组变量间的变换关系，第三个方程给出了新、旧哈密顿函数之间的关系。由此可见，正则变换依赖于任意函数$F(q,Q,t)$的选择，函数 F 称为**母函数**。显然，在母函数不显含时间 t 时，有

$$
H^* = H
$$

一般情况下，当给出了一组变换式以后，即可根据微分式(7.4.8) 来判别变换是否为正则的。反之，若给出一个母函数 $F(q, Q, t)$，则可根据式(7.4.9)得到一组正则变换。

在正则变换中，由于变换的广泛性，使得经过变换后的新变量可能不再具有原来物理意义上的“坐标”和“动量”了。

7.4.2 母函数的各种形式

为了实现两组正则变量的变换，母函数 F 必须是包含两组变量的函数。由于 $4k$ 个两组正则变量和时间 t 通过 $2k$ 个变换关系式联系着，所以其中只有$(2k+1)$个变量是独立的。母函数 F 在这 $2k$ 个变

量中要求两组变量各占一半，只含有新变量或只含有旧变量都不能使式(7.4.8)成立。因此，母函数 F 所显含的变量在最简单的情况下有如下四种不同形式：

$$F_1(q,Q,t)、F_2(p,Q,t)、F_3(q,P,t)、F_4(p,P,t)$$

以下将逐一讨论。

1）母函数为 $F_1(q,Q,t)$

该形式的母函数已在前面讨论过，有关结果列出如下：

$$\left.\begin{aligned} p_j &= \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \\ P_j &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \\ H^* &= H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \end{aligned}\right\} \quad (j=1,2,\cdots,k)$$

2）母函数为 $F_2(p,Q,t)$

以母函数 F_1 为基础，来寻找母函数 F_2 的变换关系。根据勒让德变换式，把以 q、Q 为变量的函数 $F_1(q,Q,t)$ 变换成以 p、Q 为新变量的函数 $F_2(p,Q,t)$，其中变量 Q 不变，以变量 p 代替变量 q，且有 $p_j=\dfrac{\partial F_1}{\partial q_j}$，于是取

$$F_2(p,Q,t) = F_1(q,Q,t) - \sum_{j=1}^{k} q_j p_j \tag{7.4.10}$$

根据式(6.4.7)和式(6.4.9)，应有如下关系成立：

$$\frac{\partial F_2}{\partial p_j} = -q_j \text{ 及 } \frac{\partial F_2}{\partial Q_j} = \frac{\partial F_1}{\partial Q_j}$$

则可得到变换关系为

$$\left.\begin{aligned} q_j &= -\frac{\partial F_2}{\partial p_j} \\ P_j &= -\frac{\partial F_2}{\partial Q_j} \end{aligned}\right\} \quad (j=1,2,\cdots,k) \tag{7.4.11}$$

由式(7.4.10)可知 $\dfrac{\partial F_2}{\partial t}=\dfrac{\partial F_1}{\partial t}$，因此哈密顿函数的变换关系为

$$H^* = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

3）母函数为$F_3(q,P,t)$

仍使用上述方法，此时变量 q 不变，以变量 P 代替变量Q，根据式(6.4.2)应注意此处旧函数的偏导数与新变量之间的变换关系为$P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j}$。所以，由勒让德变换的推导可知，应取

$$F_3(q,P,t) = F_1(q,Q,t) + \sum_{j=1}^{k} Q_j P_j \tag{7.4.12}$$

且相应有如下关系成立：

$$\frac{\partial F_1}{\partial q_j} = \frac{\partial F_3}{\partial q_j}, \quad Q_j = \frac{\partial F_3}{\partial P_j} \tag{7.4.13}$$

由此得到变换关系为

$$\left.\begin{aligned} p_j &= \frac{\partial F_3}{\partial q_j} \\ Q_j &= \frac{\partial F_3}{\partial P_j} \\ H^* &= H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \end{aligned}\right\} \quad (j = 1,2,\cdots,k) \tag{7.4.14}$$

4）母函数为$F_4(p,P,t)$

为了得到该形式母函数的变换关系，以$F_3(q,P,t)$作为旧变量的函数，取

$$F_4(p,P,t) = F_3(q,P,t) - \sum_{j=1}^{k} q_j p_j \tag{7.4.15}$$

同理得到如下变换关系：

$$\left.\begin{aligned} q_j &= -\frac{\partial F_4}{\partial p_j} \\ Q_j &= \frac{\partial F_4}{\partial P_j} \\ H^* &= H + \frac{\partial F_4}{\partial t} \end{aligned}\right\} \quad (j = 1,2,\cdots,k) \tag{7.4.16}$$

例 7－6 给定正则变换的母函数

$$F(q,Q)=\frac{1}{2}q\sqrt{2Q-q^2}+Q\arcsin\frac{q}{\sqrt{2Q}}$$

试求由母函数生成的正则变换。

解： 根据式(7.4.9)可求得正则变换如下

$$p=\frac{\partial F}{\partial q}=\frac{1}{2}\sqrt{2Q-q^2}-\frac{q^2}{2\sqrt{2Q-q^2}}+\frac{Q}{\sqrt{2Q-q^2}}=\sqrt{2Q-q^2} \tag{a}$$

$$P=-\frac{\partial F}{\partial Q}=-\arcsin\frac{q}{\sqrt{2Q}}+\frac{q}{2}(2Q-q^2)^{-\frac{1}{2}}-\frac{q}{2}(2Q-q^2)^{-\frac{1}{2}}=-\arcsin\frac{q}{\sqrt{2Q}}$$

$$=-\arctan\frac{q}{\sqrt{2Q-q^2}} \tag{b}$$

由式 (a) 解出 Q，得第一个变换式

$$Q=\frac{1}{2}(p^2+q^2) \tag{c}$$

将式(c)代入式(b)可得第二个变换式

$$P=-\arctan\frac{q}{p}$$

例 7－7 取母函数为$F(q,Q,t)=\sum_{j=1}^{k}q_jQ_j$，试求由母函数生成的正则变换。

解： 由式(7.4.9)可求得

$$p_j=\frac{\partial F}{\partial q_j}=Q_j,\qquad P_j=-\frac{\partial F}{\partial Q_j}=-q_j$$

即 q、p 与 Q、P 之间有下列关系式

$$q_j=-P_j,\qquad p_j=Q_j$$

由此可见，原为坐标变成了“动量”，原为动量变成了“坐标”，各变量已不再具有原来的物理意义了。

例 7－8 已知 $H=H^*$，证明下面两组变换方程分别为正则变换，并求相应的母函数。

(1) $q=\sqrt{\dfrac{2P}{mk}}\sin Q$，$p=\sqrt{2mkP}\cos Q$

(2) $Q=\sqrt{2q}\cos p$，$P=\sqrt{2q}\sin p$

解：(1) 由于变换方程中不显含时间 t，则其正则变换条件为

$$\sum_{j=1}^{k}(p_j\mathrm{d}q_j-P_j\mathrm{d}Q_j)=\mathrm{d}F \tag{a}$$

由

$$q=\sqrt{\frac{2P}{mk}}\sin Q,\quad p=\sqrt{2mkP}\cos Q$$

解得

$$p=mkq\cot Q,\qquad P=\frac{1}{2}mkq^2\frac{1}{\sin^2 Q}$$

代入式(a)，得

$$mkq\cot Q\mathrm{d}q-\frac{1}{2}mkq^2\csc^2 Q\mathrm{d}Q=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mkq^2\cot Q\right)=\mathrm{d}F_1(q,Q)$$

说明存在一个母函数，即

$$F_1=\frac{1}{2}mkq^2\cot Q$$

故为正则变换。

(2) 由于变换方程中不显含时间 t，则其正则变换条件为

$$\sum_{j=1}^{k}(p_j\mathrm{d}q_j-P_j\mathrm{d}Q_j)=\mathrm{d}F \tag{b}$$

对 Q 求微分，得

$$\mathrm{d}Q=\mathrm{d}(\sqrt{2q}\cos p)=-\sqrt{2q}\sin p\mathrm{d}p+\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{q}}\cos p\mathrm{d}q \tag{c}$$

将式(c)代入式(b)，得

$$p\mathrm{d}q-P\mathrm{d}Q=p\mathrm{d}q-\sqrt{2q}\sin p\left(-\sqrt{2q}\sin p\mathrm{d}p+\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{q}}\cos p\mathrm{d}q\right)$$

即

$$p\mathrm{d}q-P\mathrm{d}Q=(p-\sin p\cos p)\mathrm{d}q+2q\sin^2 p\mathrm{d}p \tag{d}$$

因为

$$\frac{\partial}{\partial p}(p-\sin p\cos p)=1-\cos^2 p+2\sin^2 p$$

$$\frac{\partial}{\partial q}(2q\sin^2 p)=2\sin^2 p$$

故式(d)为函数 F 的全微分，即条件(b)成立，因此该变换为正则变换。

令

$$(p-\sin p\cos p)\mathrm{d}q+2q\sin^2 p\mathrm{d}p=\mathrm{d}F$$

因此

$$\frac{\partial F}{\partial q}=p-\sin p\cos p \tag{e}$$

$$\frac{\partial F}{\partial p}=2q\sin^2 p \tag{f}$$

由式(e)得

$$\begin{aligned}F&=\int(p-\sin p\cos p)\mathrm{d}q+f(p)\\&=(pq-q\sin p\cos p)+f(p)\end{aligned} \tag{g}$$

将式(g)代入式(f)，得

$$2q\sin^2 p+\frac{\partial f}{\partial p}=2q\sin^2 p$$

因此，$f=$ 常数。于是母函数为

$$F=q(p-\sin p\cos p) \tag{h}$$

由

$$Q=\sqrt{2q}\cos p$$

得

$$p=\arccos\frac{Q}{\sqrt{2q}}$$

代入式(h)，得

$$F_1(q,Q)=q\arccos\frac{Q}{\sqrt{2q}}-\frac{Q}{2}\sqrt{2q-Q^2}$$

例 7－9 应用正则变换求解单自由度质点的线性谐振动。

解： 令质点的质量为 m，广义坐标为 q，系统的劲度系数为 k，则动能 T 和势能 V 分别为

$$T=\frac{1}{2}m\dot{q}^2, \qquad V=\frac{1}{2}kq^2$$

于是

$$p=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}=m\dot{q}$$

由于该系统为保守系统，故

$$H=T+V=\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}kq^2 \tag{a}$$

试取母函数为

$$F=F_1(q,Q,t)=\frac{1}{2}\sqrt{mk}q^2\cot\sqrt{\frac{k}{m}}Q \tag{b}$$

利用变换关系式(7.4.9)有

$$p=\frac{\partial F}{\partial q}=q\sqrt{mk}\cot\sqrt{\frac{k}{m}}Q \tag{c}$$

$$P=-\frac{\partial F}{\partial Q}=\frac{1}{2}kq^2\csc^2\sqrt{\frac{k}{m}}Q \tag{d}$$

联立式(c)和式(d)，可解得

$$q=\sqrt{\frac{2P}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}Q \tag{e}$$

$$p=\sqrt{2mP}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}Q \tag{f}$$

因母函数不显含时间 t，因此有

$$H^*=H$$

将式(e)和式(f)代入 H，得

$$H^*=P$$

由此可见，经过变换后的哈密顿函数更加简洁，且存在循环坐标 Q，这也正是我们进行正则变换的目的。对应新变量的正则方程为

$$\dot{Q}=\frac{\partial H^*}{\partial P}=1 \qquad \dot{P}=-\frac{\partial H^*}{\partial Q}=0$$

积分上式，得

$$Q=t+c_1 \qquad P=c_2$$

将以上两式代入式(e)，并注意 $H^* = P = E$ 即为系统的总机械能，于是可得系统的振动规律为

$$q = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}}(t + c_1)$$

由上述求解过程可以看到，正则变换后的广义坐标 Q 和广义动量 P 分别为时间 t 和总机械能 E，已不再具有原来的意义了。

7.5 用拉格朗日括号和泊松括号判别正则变换

7.5.1 用拉格朗日括号判别正则变换

考虑如下变换方程

$$\left.\begin{aligned} Q_j = Q_j(q_1, q_2, \cdots, q_k, p_1, p_2, \cdots, p_k, t) \\ P_j = P_j(q_1, q_2, \cdots, q_k, p_1, p_2, \cdots, p_k, t) \end{aligned}\right\} \quad (j = 1, 2, \cdots, k) \tag{7.5.1}$$

令（q_α，p_β）为旧变量中的任意两个，定义拉格朗日括号为

$$[q_\alpha, p_\beta] = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_\alpha} \frac{\partial P_j}{\partial p_\beta} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_\beta} \frac{\partial P_j}{\partial q_\alpha} \right) \tag{7.5.2}$$

由式(7.4.8)可知，当母函数不显含时间 t 时，正则变换的充分必要条件可写成

$$\sum_{j=1}^{k} p_j \mathrm{d}q_j - \sum_{j=1}^{k} P_j \mathrm{d}Q_j = \mathrm{d}F \tag{7.5.3}$$

也就是说，若变换为正则变换，方程左边必构成某一函数的全微分。

根据式(7.5.1)有

$$\mathrm{d}Q_j = \sum_{\alpha=1}^{k} \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_\alpha} \mathrm{d}q_\alpha + \frac{\partial Q_j}{\partial p_\alpha} \mathrm{d}p_\alpha \right)$$

将上式代入式(7.5.3)的左边，得

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{k} p_j \mathrm{d}q_j - \sum_{j=1}^{k} P_j \sum_{\alpha=1}^{k} \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_\alpha} \mathrm{d}q_\alpha + \frac{\partial Q_j}{\partial p_\alpha} \mathrm{d}p_\alpha \right) \\ = & \sum_{\alpha=1}^{k} \left[\left(p_\alpha - \sum_{j=1}^{k} P_j \frac{\partial Q_j}{\partial q_\alpha} \right) \mathrm{d}q_\alpha - \sum_{j=1}^{k} P_j \frac{\partial Q_j}{\partial p_\alpha} \mathrm{d}p_\alpha \right] \end{aligned}$$

要使上式成为全微分的条件是必须同时满足以下三组恒等式：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p_\beta}\left(p_\alpha-\sum_{j=1}^{k}P_j\frac{\partial Q_j}{\partial q_\alpha}\right)&=\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(-\sum_{j=1}^{k}P_j\frac{\partial Q_j}{\partial p_\beta}\right)\\ \frac{\partial}{\partial p_\beta}\left(\sum_{j=1}^{k}P_j\frac{\partial Q_j}{\partial p_\alpha}\right)&=\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left(\sum_{j=1}^{k}P_j\frac{\partial Q_j}{\partial p_\beta}\right)\\ \frac{\partial}{\partial q_\beta}\left(p_\alpha-\sum_{j=1}^{k}P_j\frac{\partial Q_j}{\partial q_\alpha}\right)&=\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(p_\beta-\sum_{j=1}^{k}P_j\frac{\partial Q_j}{\partial q_\beta}\right)\end{aligned}\right\}\tag{7.5.4}$$

展开其中第一组，得

$$\frac{\partial p_\alpha}{\partial p_\beta}-\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial P_j}{\partial p_\beta}\frac{\partial Q_j}{\partial q_\alpha}+P_j\frac{\partial^2 Q_j}{\partial q_\alpha\partial p_\beta}\right)=-\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial P_j}{\partial q_\alpha}\frac{\partial Q_j}{\partial p_\beta}+P_j\frac{\partial^2 Q_j}{\partial p_\beta\partial q_\alpha}\right)$$

进一步简化上式，并注意到$\dfrac{\partial p_\alpha}{\partial p_\beta}=\delta_{\alpha\beta}$，则有

$$\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_\alpha}\frac{\partial P_j}{\partial p_\beta}-\frac{\partial Q_j}{\partial p_\beta}\frac{\partial P_j}{\partial q_\alpha}\right)=\delta_{\alpha\beta}\tag{7.5.5}$$

上式可用拉格朗日括号表示为

$$[q_\alpha,p_\beta]=\delta_{\alpha\beta}$$

同理，式(7.5.4)中的第二组、第三组恒等式也可表示为

$$[q_\alpha,q_\beta]=0,\quad [p_\alpha,p_\beta]=0$$

于是，可得如下结论：从一组旧变量 q、p 到另一组新变量 Q、P 的变换

$$\left.\begin{aligned}Q_j&=Q_j(q_j,p_j,t)\\ P_j&=P_j(q_j,p_j,t)\end{aligned}\right\}\qquad(j=1,2,\cdots,k)$$

如果满足关系式

$$[q_\alpha,q_\beta]=0,\quad [p_\alpha,p_\beta]=0,\quad [q_\alpha,p_\beta]=\delta_{\alpha\beta}\tag{7.5.6}$$

则该变换是正则变换。

同理，考虑变换式

$$\left.\begin{aligned}q_j&=q_j(Q_j,P_j,t)\\ p_j&=p_j(Q_j,P_j,t)\end{aligned}\right\}\qquad(j=1,2,\cdots,k)\tag{7.5.7}$$

若该变换是正则变换，则应满足关系式

$$[Q_\alpha,Q_\beta]=0,\quad [P_\alpha,P_\beta]=0,\quad [Q_\alpha,P_\beta]=\delta_{\alpha\beta}\tag{7.5.8}$$

7.5.2 用泊松括号判别正则变换

在 7.3 节中，定义泊松括号为

$$(\varphi,\psi)=\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_j}\frac{\partial\psi}{\partial p_j}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_j}\frac{\partial\psi}{\partial q_j}\right)$$

其中 φ、ψ 是 q_1，q_2，…，q_k，p_1，p_2，…，p_k，t 的函数，即

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=\varphi(q_j,p_j,t)\\ \psi&=\psi(q_j,p_j,t)\end{aligned}\right.\qquad (j=1,2,\cdots,k)$$

将拉格朗日括号与泊松括号比较可以发现，将其中某一括号的各偏导数项上下交换位置，即可得到另一括号。实际上两者之间确实存在一定的关系，现在来证明这种关系。

设有 $2n$ 个互为独立的任意变量 u_1，u_2，…，u_k，u_{k+1}，…，u_{2k}均为广义坐标 q_1，q_2，…，q_k 和广义动量 p_1，p_2，…，p_k 的函数，则存在关系式

$$\sum_{l=1}^{2k}[u_l,u_i](u_l,u_j)=\delta_{ij}\tag{7.5.9}$$

证明：由拉格朗日括号和泊松括号的定义，有

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{2k}[u_l,u_i](u_l,u_j)&=\sum_{l=1}^{2k}\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{\partial q_n}{\partial u_l}\frac{\partial p_n}{\partial u_i}-\frac{\partial q_n}{\partial u_i}\frac{\partial p_n}{\partial u_l}\right)\\&\qquad\sum_{m=1}^{k}\left(\frac{\partial u_l}{\partial q_m}\frac{\partial u_j}{\partial p_m}-\frac{\partial u_l}{\partial p_m}\frac{\partial u_j}{\partial q_m}\right)\\&=\sum_{l=1}^{2k}\sum_{n=1}^{k}\sum_{m=1}^{k}\left(\frac{\partial q_n}{\partial u_l}\frac{\partial p_n}{\partial u_i}\frac{\partial u_l}{\partial q_m}\frac{\partial u_j}{\partial p_m}\right.\\&\qquad\left.+\frac{\partial q_n}{\partial u_i}\frac{\partial p_n}{\partial u_l}\frac{\partial u_l}{\partial p_m}\frac{\partial u_j}{\partial q_m}\right)\end{aligned}$$

其中

$$\sum_{l=1}^{2k}\frac{\partial q_n}{\partial u_l}\frac{\partial u_l}{\partial q_m}=\frac{\partial q_n}{\partial q_m}=\delta_{nm},\qquad\sum_{l=1}^{2k}\frac{\partial q_n}{\partial u_l}\frac{\partial u_l}{\partial p_m}=\frac{\partial q_n}{\partial p_m}=0$$

$$\sum_{l=1}^{2k}\frac{\partial p_n}{\partial u_l}\frac{\partial u_l}{\partial q_m}=\frac{\partial p_n}{\partial q_m}=0,\qquad\sum_{l=1}^{2k}\frac{\partial p_n}{\partial u_l}\frac{\partial u_l}{\partial p_m}=\frac{\partial p_n}{\partial p_m}=\delta_{nm}$$

于是

$$\sum_{l=1}^{2k}[u_l,u_i](u_l,u_j) = \sum_{n=1}^{k}\sum_{m=1}^{k}\left(\frac{\partial p_n}{\partial u_i}\frac{\partial u_j}{\partial p_m}\delta_{nm} + \frac{\partial q_n}{\partial u_i}\frac{\partial u_j}{\partial q_m}\delta_{nm}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{k}\left(\frac{\partial p_n}{\partial u_i}\frac{\partial u_j}{\partial p_n} + \frac{\partial q_n}{\partial u_i}\frac{\partial u_j}{\partial q_n}\right) = \frac{\partial u_j}{\partial u_i} = \delta_{ij}$$

式(7.5.9)得证。

根据上述关系，可以得到用泊松括号判别正则变换的条件。

设 $2k$ 个 u_l 是 q_1，q_2，…，q_k，p_1，p_2，…，p_k 的函数，利用正则变换的充分必要条件(式(7.5.6))可得到如下关系式。

①令 $u_i = p_i$，$u_j = p_j$，则式(7.5.9)成为

$$\sum_{l=1}^{k}[q_l,p_i](q_l,p_j) + \sum_{l=1}^{k}[p_l,p_i](p_l,p_j)$$

$$= \sum_{l=1}^{k}\delta_{li}(q_l,p_j) = (q_i,p_j) = \frac{\partial p_j}{\partial p_i} = \delta_{ij}$$

②令 $u_i = p_i$，$u_j = q_j$ 则

$$\sum_{l=1}^{k}[q_l,p_i](q_l,q_j) + \sum_{l=1}^{k}[p_l,p_i](p_l,q_j)$$

$$= \sum_{l=1}^{k}\delta_{li}(q_l,q_j) = (q_i,q_j) = \frac{\partial q_j}{\partial p_i} = 0$$

③令 $u_i = q_i$，$u_j = p_j$ 则

$$\sum_{l=1}^{k}[q_l,q_i](q_l,p_j) + \sum_{l=1}^{k}[p_l,q_i](p_l,p_j)$$

$$= \sum_{l=1}^{k}\delta_{li}(p_l,p_j) = (p_i,p_j) = \frac{\partial p_j}{\partial q_i} = 0$$

综上所述，从一组旧变量 q、p 到另一组新变量 Q、P 的变换

$$\left.\begin{aligned} Q_j &= Q_j(q_j,p_j,t) \\ P_j &= P_j(q_j,p_j,t) \end{aligned}\right\} \qquad (j=1,2,\cdots,k)$$

如果能从 $2k$ 个变量中找到任意两个变量所形成的泊松括号，即有

$$(q_i,q_j)=0,\quad (p_i,p_j)=0,\quad (q_i,p_j)=\delta_{ij} \qquad (7.5.10)$$

那么，这种变换就是正则变换。

若将 q_j、p_j 看作是 Q_j、P_j 的函数，并利用式(7.5.8)，同理可

得如下正则变换判别式：

$$(Q_i, Q_j) = 0, \quad (P_i, P_j) = 0, \quad (Q_i, P_j) = \delta_{ij} \tag{7.5.11}$$

例 7－10 已知变换为

$$Q = \sqrt{2q}\,\mathrm{e}^t\cos p$$

$$P = \sqrt{2q}\,\mathrm{e}^{-t}\sin p$$

试用拉格朗日括号判别其是否为正则变换。

解：

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{1}{\sqrt{2q}}\mathrm{e}^t\cos p$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} = \frac{1}{\sqrt{2q}}\mathrm{e}^{-t}\sin p$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = -\sqrt{2q}\,\mathrm{e}^t\sin p$$

$$\frac{\partial P}{\partial p} = \sqrt{2q}\,\mathrm{e}^{-t}\cos p$$

代入拉格朗日括号判别式，可得

$$[q, p] = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = \cos^2 p + \sin^2 p = 1$$

注意上式中 $\alpha = \beta = 1$，故 $\delta_{11} = 1$

显然

$$[q, q] = 0$$

$$[p, p] = 0$$

由此可见，完全满足式(7.5.6)的条件，故此变换为正则变换。

例 7－11 给定变换

$$q = -\ln\frac{Q}{\sin P}$$

$$p = Q\cot P$$

试用泊松括号判别其是否为正则变换。

解： 计算泊松括号判别式

$$(q_\alpha, p_\beta) = \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial Q_j}\frac{\partial p_\beta}{\partial P_j} - \frac{\partial q_\alpha}{\partial P_j}\frac{\partial p_\beta}{\partial Q_j}\right) \tag{a}$$

其中

$$\frac{\partial q}{\partial Q}=-\frac{\sin P}{Q}\cdot\frac{1}{\sin P}=-\frac{1}{Q},\qquad \frac{\partial p}{\partial P}=-\frac{Q}{\sin^2 P}$$

$$\frac{\partial q}{\partial P}=-\frac{\sin P}{Q}\cdot\left(-\frac{Q\cos P}{\sin^2 P}\right)=\cot P,\qquad \frac{\partial p}{\partial Q}=\cot P$$

将以上各项代入式(a)，得

$$(q,p)=\frac{1}{\sin^2 P}-\cot^2 P=1$$

且显然有

$$(q,q)=0,\qquad (p,p)=0$$

由此可见，所给变换完全满足泊松括号判别式(7.5.10)，故该变换为正则变换。

7.6 哈密顿—雅可比方程

正则变换的目的在于使变换后的哈密顿函数更简洁、循环坐标更多。是否能达到这一目的，与母函数的选取有着密切关系。而等于零的函数可以说是最简洁的函数形式了。因此，选取怎样的母函数能使变换后的哈密顿函数等于零，这正是哈密顿—雅可比方程要解决的问题。

对于一个具有 k 个自由度的完整系统，其哈密顿正则方程为

$$\dot{q}_j=\frac{\partial H}{\partial p_j},\qquad \dot{p}_j=-\frac{\partial H}{\partial q_j}\qquad (j=1,2,\cdots,k)\tag{7.6.1}$$

经过正则变换，使以 q、p 为变量的哈密顿函数 H，变换成以 Q、P 为新变量的哈密顿函数 H^*，且对应的正则方程为

$$\dot{Q}_j=\frac{\partial H^*}{\partial P_j},\qquad \dot{P}_j=-\frac{\partial H^*}{\partial Q_j}\qquad (j=1,2,\cdots,k)\tag{7.6.2}$$

如果 $H^*=0$，则上式可写成

$$\dot{Q}_j=\frac{\partial H^*}{\partial P_j}=0,\qquad \dot{P}_j=-\frac{\partial H^*}{\partial Q_j}=0\qquad (j=1,2,\cdots,k)\tag{7.6.3}$$

直接对上式积分可得

$$Q_j = \alpha_j = \text{常数}, \qquad P_j = \beta_j = \text{常数} \qquad (j=1,2,\cdots,k) \tag{7.6.4}$$

式中 α_j、β_j 也是积分常数。为了达到上述目的，关键在于母函数的选择，根据新、旧哈密顿函数之间的变换关系 $H^* = H + \frac{\partial F}{\partial t}$，母函数必须满足

$$H + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \tag{7.6.5}$$

由 7.4 节的分析可知，母函数的选择可以有四种不同形式，如果取 $F = F_3(q, P, t)$，并用函数 S 表示，即

$$H(q, p, t) + \frac{\partial}{\partial t}S(q, P, t) = 0 \tag{7.6.6}$$

将式(7.6.4)中的 $P_j = \beta_j$ 代入函数 S 中，S 则可表示成变量 q_j、常数 β_j 和时间 t 的函数，即

$$S = S(q_1, q_2, \cdots, q_k, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k, t) \tag{7.6.7}$$

显然，常数 β_j 可由初始条件决定。

于是，对应于母函数 $S = F_3(q, P, t)$形式的变换关系可写为

$$p_j = \frac{\partial}{\partial q_j}S(q_j, \beta_j, t), \quad \alpha_j = \frac{\partial}{\partial \beta_j}S(q_j, \beta_j, t) \qquad (j=1,2,\cdots,k) \tag{7.6.8}$$

将式(7.6.8)中的 p_j 代入式(7.6.6)，得到

$$H\left(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_k,\ \frac{\partial S}{\partial q_1},\ \frac{\partial S}{\partial q_2},\ \cdots,\ \frac{\partial S}{\partial q_k},\ t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{7.6.9}$$

这就是**哈密顿—雅可比方程**。该方程是关于 k 个变量 q_j 和时间 t 的一阶偏微分方程，其解 $S = S(q_1, q_2, \cdots, q_k, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k, t)$称为偏微分方程(式(7.6.9))的全积分。

当 S 被解出后，根据变换式(7.6.8)，即可得到正则方程的解为

$$\left.\begin{aligned} q_j &= q_j(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k, t) \\ p_j &= p_j(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k, t) \end{aligned}\right\} \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ k) \tag{7.6.10}$$

其中包含了 $2k$ 个由初始条件决定的积分常数。同时应注意，为使式(7.6.8)中的第二式能解出 q_j 为 α_j、β_j 和时间 t 的函数，则要求函数 S 应满足条件

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial \beta_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial \beta_k} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (7.6.11)$$

或

$$\left| \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial \beta_j} \right| \neq 0 \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$$

由此，将确定正则变换的母函数问题转变成了求哈密顿—雅可比方程的全积分问题，且将变换后的新变量 Q、P 分别变换成为常数 α 和 β，使相空间(q_j, p_j)中的相轨迹被映射到(Q_j, P_j)空间中的一个固定点，进而可直接通过变换关系得到正则方程的解。当然，能够实现这样的变换，对于得到正则方程的解是非常有用的。但其困难在于对方程(7.6.9)求解并不是容易的事，尽管如此，在某些情况下还是可解的。有关这个问题将在下一节中介绍。

上述内容可用**雅可比定理**表达如下。

如果

$$S = S(q_1, q_2, \cdots, q_k, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k, t)$$

是哈密顿——雅可比方程

$$H(q_1, q_2, \cdots, q_k, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \cdots, \frac{\partial S}{\partial q_k}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

的全积分，则由正则变换

$$p_j = \frac{\partial}{\partial q_j} S(q_j, \beta_j, t), \alpha_j = \frac{\partial}{\partial \beta_j} S(q_j, \beta_j, t) \quad (j = 1, 2, \cdots, k)$$

所决定的方程组

$$\left.\begin{aligned} q_j &= q_j(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k, t) \\ p_j &= p_j(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k, t) \end{aligned}\right\} \quad (j = 1, 2, \cdots, k)$$

乃是正则方程

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad (j = 1,2,\cdots,k)$$

的解。

例 7－12 应用哈密顿—雅可比方法，求解单自由度质点的线性谐振动。设系统的哈密顿函数为

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$$

解： 这是一个极简单的动力学问题，并不需要用哈密顿—雅可比方程求解，在这里并不是要说明哈密顿—雅可比方法在这种问题中有多少优越性，而是要通过一个简单问题熟悉一下用哈密顿—雅可比方程解题的基本方法和步骤，为解更复杂的动力学问题作准备。

由式(7.6.8)及式(7.6.9)可得本题的哈密顿—雅可比方程为

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{kq^2}{2} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{a}$$

由于只有最后一项含 t，故可取函数 S 为以下形式

$$S(q,\beta,t) = W(q,\beta) - \beta t \tag{b}$$

其中的 β 是变换后的动量，也是积分常数。将式(b)代入式(a)，可消去 t，得

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{kq^2}{2} = \beta \tag{c}$$

式(c)可以直接积分为

$$W = \sqrt{mk}\int\sqrt{\frac{2\beta}{k} - q^2}\mathrm{d}q$$

从而有

$$S = \sqrt{mk}\int\sqrt{\frac{2\beta}{k} - q^2}\mathrm{d}q - \beta t \tag{d}$$

由于不必求 S 本身，只要求$\dfrac{\partial S}{\partial \beta}$即可，因此可以带着积分号对 β 求

导，得

$$\alpha = \frac{\partial S}{\partial \beta} = \sqrt{\frac{m}{k}}\int \frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{\frac{2\beta}{k} - q^2}} - t$$

再积分后得到

$$t + \alpha = -\sqrt{\frac{m}{k}}\arccos q\sqrt{\frac{k}{2\beta}} \tag{e}$$

令 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$，由式(e)可求得

$$q = \sqrt{\frac{2\beta}{k}}\cos\omega(t + \alpha) \tag{f}$$

另一正则变量

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{mk}\sqrt{\frac{2\beta}{k} - q^2} = m\omega\sqrt{\frac{2\beta}{k}}\sin\omega(t + \alpha) \tag{g}$$

7.7 变量的分离

一般来说，哈密顿—雅可比方程是一阶非线性偏微分方程，它的求解较为困难。但对于某些特殊情形，可以简化方程，进而得到其全积分。以下讨论两种可分离变量的情况。

1）哈密顿函数不显含时间 t 和变量 q_1，q_2，…，q_l 的情形

首先，哈密顿函数不显含时间 t，在这种情况下存在能量积分

$$H(q,p) = h(\text{常量}) \tag{7.7.1}$$

于是，哈密顿—雅可比方程可写成

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

或

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = -\frac{\partial S}{\partial t} = h \tag{7.7.2}$$

由于 H 中不显含时间 t，当然 $\frac{\partial S}{\partial q}$ 也不显含时间 t，因此方程

(7.7.2)的解可设为

$$\begin{aligned}S &= S(q_1, q_2, \cdots, q_k, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k, t) \\ &= W(q_1, q_2, \cdots, q_k, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k) - ht\end{aligned} \quad (7.7.3)$$

将其解代入方程(7.7.2)，则哈密顿—雅可比方程为

$$H\left(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_k,\ \frac{\partial W}{\partial q_1},\ \frac{\partial W}{\partial q_2},\ \cdots,\ \frac{\partial W}{\partial q_k}\right) = h \quad (7.7.4)$$

上式不含时间 t，因此，求解上式较式(7.6.9)更容易些。

再者，由于 q_1，q_2，$\cdots$，q_l 是循环坐标，即 $q_1, q_2, \cdots, q_l$ 不显含在 H 中，按照上述同样的方法，可进一步假设方程(7.7.4)的解为

$$W = \beta_1 q_1 + \beta_2 q_2 + \cdots + \beta_l q_l + W^*(q_{l+1}, q_{l+2}, \cdots, q_k, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k)$$

于是哈密顿—雅可比方程最终可写成如下形式：

$$H\left(q_{l+1}, q_{l+2}, \cdots, q_k, \beta_1, \beta_2, \cdots \beta_l, \frac{\partial W^*}{\partial q_{l+1}}, \frac{\partial W^*}{\partial q_{l+2}}, \cdots, \frac{\partial W^*}{\partial q_k}\right) = h \quad (7.7.5)$$

从上面的分析可以看出，当 H 不显含时间 t 时，母函数 S 中的时间变量将被分离出来，哈密顿—雅可比方程成为关于不含时间变量 t 的函数 W 的一阶偏微分方程。当 H 不显含循环坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_l$ 时，可进一步把循环坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_l$ 从函数 W 中分离出来，最后使哈密顿—雅可比方程成为关于 $(k-l)$ 个变量及含有 $(k+1)$ 个常数的一阶偏微分方程。注意其中 $(k+1)$ 个常数并不是独立的，实际只有 k 个是独立的。这样只需求解方程(7.7.5)，而相应的母函数为

$$\begin{aligned}S = W - ht &= \beta_1 q_1 + \beta_2 q_2 + \cdots + \beta_l q_l \\ &\quad + W^*(q_{l+1}, q_{l+2}, \cdots, q_k, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k) - ht\end{aligned} \quad (7.7.6)$$

2）哈密顿—雅可比方程中有一个变量及相应偏导数可以从所有其余的变量和偏导数中分离出来的情形

哈密顿—雅可比方程

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

可以写成

$$f_1(q_1,\frac{\partial S}{\partial q_1}) + F_1(q_2,q_3,\cdots,q_k,t,\frac{\partial S}{\partial q_2},\frac{\partial S}{\partial q_3},\cdots,\frac{\partial S}{\partial q_k},\frac{\partial S}{\partial t}) = 0 \tag{7.7.7}$$

因上式中 f_1 只与 q_1 有关，而 F_1 与其余变量有关，欲使上式成立，则 f_1 和 F_1 都必须为常量，即

$$\left.\begin{aligned} &f_1(q_1,\frac{\partial S}{\partial q_1}) = \beta_1 \\ &F_1(q_2,q_3,\cdots,q_k,t,\frac{\partial S}{\partial q_2},\frac{\partial S}{\partial q_3},\cdots,\frac{\partial S}{\partial q_k},\frac{\partial S}{\partial t}) = \tilde{\beta}_1 \end{aligned}\right\} \tag{7.7.8}$$

此时，其解的形式可写成

$$S = S_1(q_1) + W_1(q_2,q_3,\cdots,q_k,t) \tag{7.7.9}$$

代入式(7.7.8)，得

$$\left.\begin{aligned} &f_1(q_1,\frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}q_1}) = \beta_1 \\ &F_1(q_2,q_3,\cdots,q_k,t,\frac{\partial W_1}{\partial q_2},\frac{\partial W_1}{\partial q_3},\cdots,\frac{\partial W_1}{\partial q_k},\frac{\partial W_1}{\partial t}) = \tilde{\beta}_1 \end{aligned}\right\} \tag{7.7.10}$$

式(7.7.10)中的第一式为常微分方程，积分后得

$$S_1 = S_1(q_1,\beta_1)$$

第二式仍为函数 W_1 的偏微分方程，但其中独立变量已少了一个。即为 $(k-1)$ 个坐标变量 q_2，q_3，…，q_k 和一个时间变量 t。

如果函数 F_1 还有可分离的变量，如 q_2，同理，可设

$$W_1 = S_2(q_2) + W_2(q_3,q_4,\cdots,q_k,t) \tag{7.7.11}$$

代入式(7.7.10)中的第二式，得

$$\left.\begin{aligned} &f_2(q_2,\frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}q_2}) = \beta_2 \\ &F_2(q_3,q_4,\cdots,q_k,t,\frac{\partial W_2}{\partial q_3},\frac{\partial W_2}{\partial q_4},\cdots,\frac{\partial W_2}{\partial q_k},\frac{\partial W_2}{\partial t}) = \tilde{\beta}_2 \end{aligned}\right\} \tag{7.7.12}$$

对第一式积分得

$$S_2 = S_2(q_2,\beta_2)$$

如果方程的变量可以全部分离，则可逐次应用上面的方法，最后得到母函数的形式为

$$S = S_1(q_1,\beta_1) + S_2(q_2,\beta_2) + \cdots + S_k(q_k,\beta_k) + c$$

式中 c 为任意常数。

例 7－13 质量为 m 的质点在有势力场中运动，已知势能函数为

$$V = \frac{\alpha}{r^2} - \frac{\beta z}{r^3}$$

式中 α 和 β 为常量，r 为质点的矢径，z 为它的直角坐标的 z 分量。试求该系统哈密顿—雅可比方程的全积分。

解： 对该问题选择球坐标较为方便。因此广义坐标为(γ,θ,φ)，在球坐标中，$z = r\cos\theta$，故有

$$V = \frac{\alpha}{r^2} - \frac{\beta z}{r^3} = \frac{\alpha}{r^2} - \frac{\beta\cos\theta}{r^2}$$

系统的哈密顿函数为

$$H = T + V = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + \frac{\alpha}{r^2} - \frac{\beta\cos\theta}{r^2} \tag{a}$$

将 $p_r = \frac{\partial S}{\partial r}$，$p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta}$，$p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi}$代入上式，由于哈密顿函数不显含时间 t，在这种情况下存在能量积分，因而

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right] + \frac{\alpha}{r^2} - \frac{\beta\cos\theta}{r^2} = h \tag{b}$$

由于 H 中不显含时间 t，且 φ 为循环坐标，因此方程的解可设为

$$S = \varphi\beta_2 + W(r,\theta,\beta_1,\beta_2,\beta_3) - ht \tag{c}$$

由于 h、β_1、β_2、β_3 并不是独立的，因此可取 $h = \beta_1$，代入式(b)，并用 r^2 乘方程的两边，则有

$$\frac{1}{2m}\left[r^2\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{{\beta_2}^2}{\sin^2\theta}\right] + \alpha - \beta\cos\theta = \beta_1 r^2$$

则变量 r 及其偏导数可从方程中分离出来，于是有

$$\left.\begin{aligned} & r^2\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}r}\right)^2 - 2mr^2\beta_1 = \beta_3 \\ & \left[\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\beta_2^2}{\sin^2\theta}\right] + 2ma - \beta 2m\cos\theta = -\beta_3 \end{aligned}\right\} \tag{d}$$

此时，可设解的形式为

$$W = S_1(r) + S_2(\theta)$$

代入式(d)，得

$$\left.\begin{aligned} & r^2\left(\frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}r}\right)^2 - 2mr^2\beta_1 = \beta_3 \\ & \left[\left(\frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \frac{\beta_2^2}{\sin^2\theta}\right] + 2ma - \beta_2 m\cos\theta = -\beta_3 \end{aligned}\right\} \tag{e}$$

分别对(e)中两式进行积分，得

$$\left.\begin{aligned} & S_1(r) = \int\sqrt{2m\beta_1 + \frac{\beta_3}{r^2}}\mathrm{d}r \\ & S_2(\theta) = \int\sqrt{2m\beta\cos\theta - 2ma - \beta_3 - \frac{\beta_2^2}{\sin^2\theta}}\mathrm{d}\theta \end{aligned}\right\} \tag{f}$$

因此，该系统哈密顿—雅可比方程的全积分为

$$\begin{aligned} S &= \varphi\beta_2 + W(r, \theta, \beta_1, \beta_2, \beta_3) - ht \\ &= \varphi\beta_2 + S_1(r) + S_2(\theta) - \beta_1 t \end{aligned}$$

将式(f)代入上式，则有

$$S = \varphi\beta_2 + \int\sqrt{2m\beta_1 + \frac{\beta_3}{r^2}}\mathrm{d}r + \int\sqrt{2m\beta\cos\theta - 2ma - \beta_3 - \frac{\beta_2^2}{\sin^2\theta}}\mathrm{d}\theta - \beta_1 t$$

习　　题

7-1　已知力学系统的拉格朗日函数

$$L = \frac{5}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 + q_1 q_2\cos(q_1 - q_2) + 3\cos q_1 + \cos q_2$$

其中 q_1、q_2 为广义坐标，试求系统的哈密顿函数 H。

7-2　已知某二自由度系统的动能

$$T=\frac{1}{2}[(\dot{q}_1-\dot{q}_2)^2+a\dot{q}_1^2t^2]$$

其中 a 为常数，势能

$$V=a\cos q_2$$

试求该系统的哈密顿函数 H。

7-3 已知力学系统的哈密顿函数

$$H=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)+\frac{a}{4}(q_1-q_2)^2+\frac{b}{4}(q_1-q_2)^2$$

其中 a、b 为常数，试求力学系统的拉格朗日函数 L。

7-4 系统在球坐标中的拉格朗日函数

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)-aF(\theta)\dot{\varphi}$$

其中 a 为常量，$F(\theta)$ 是连续可微的任意函数。试建立系统运动的正则方程。

7-5 质量为 M 的三角块置于水平面上作无摩擦滑动，另一质量为 m、半径为 R 的圆柱体沿三角块斜面作无滑动滚动，如题 7-5 图所示。用正则方程求解三角块速度和圆柱体的角速度。

7-6 质量为 m 的小环 M，套在光滑杆上，杆以等角速度 ω 绕铅垂轴旋转，小环 M 与一弹簧相连，弹簧的另一端固定在轴上，弹簧的劲度系数为 k，原长为 l_0，质量不计，光滑杆与铅垂轴的夹角为 α，见题 7-6 图所示。试应用正则方程求出小环 M 相对于杆的运动微分方程及首次积分。

7-7 已知系统的拉格朗日函数

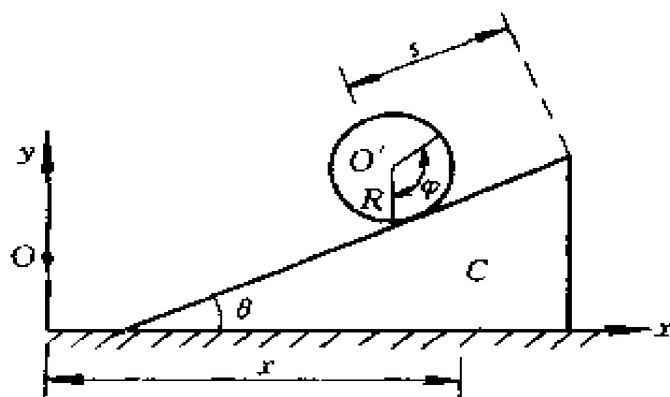
$$L=\frac{1}{2}[(\dot{q}_1-\dot{q}_2)^2+a\dot{q}_1^2t^2]-a\cos q_2$$

式中 a 为常量，试建立系统的正则方程，写出运动的首次积分。

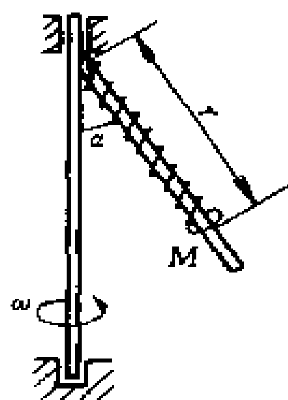
7-8 试求质点系的动量 $\boldsymbol{K}$ 和动量矩 $\boldsymbol{L}$ 的直角坐标分量所组成的泊松括号。

7-9 设 f_1，f_2，…，f_n 是正则变量 q_j、p_j 的函数，而 F 又是 f_1、f_2，…，f_n 的函数，求证：

$$(F,G) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial f_i}(f_i, G)$$



题 7－5 图



题 7－6 图

7－10　已知 $\phi_1 = p_1^2 + q_2^2$，$\phi_2 = p_2^2 + q_1^2$ 及一力学系统的哈密顿函数

$$H = p_1 p_2 + q_1 q_2$$

求证：泊松括号(ϕ_1, ϕ_2)是该系统正则方程的首次积分。

7－11　给定两函数$f_1(q_j, p_j, t)$和 $f_2(q_j, p_j, t)$，满足关系式$\frac{\partial f_1}{\partial t} + [f_1, H] = \frac{\partial f_2}{\partial t} + [f_2, H]$，其中$[f_1, H]$,$[f_2, H]$为泊松括号，试求哈密顿函数$H(q_j, p_j, t)$的首次积分，并以 f_1、f_2 表示。

7－12　试证变换

$$Q = q^2 + \frac{p^2}{n^2}, \qquad P = \frac{n}{2}\arctan\frac{p}{nq}$$

(其中 n 为常数)是正则变换。

7－13　试证变换

$$Q = q + te^p, \qquad P = p$$

是一正则变换，并求母函数 F。

7－14　试证变换

$$Q_1 = q_1^2 + p_1^2, \quad Q_2 = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2 + p_1^2 + p_2^2)$$

$$P_1 = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{q_2}{p_2}\right) - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{q_1}{p_2}\right), P_2 = -\arctan\left(\frac{q_2}{p_2}\right)$$

是正则变换。分别用定义、拉格朗日括号和泊松括号三种方法证明。

7－15 试证变换

$$Q_j = \left(\frac{p_j}{\alpha + 1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - q_j, \quad P_j = -p_j \quad (j = 1, 2, \cdots, k)$$

是正则变换，并求出母函数$F_1(q_j, Q_j)$。

7－16 已知 $H = H^*$，试证

$$Q = \sin q, \quad P = \frac{p - mv_0}{\cos q}$$

是正则变换，其中 m 和 v_0 是已知常数，求其相应的四种形式母函数 F_1、F_2、F_3 和 F_4。

7－17 已知第二类母函数

$$F_2(p, Q, t) = -p_1^2 p_2^2 + \ln(Q_1 + p_1) + \ln(Q_2 + p_2)$$

求正则变换。

7－18 已知母函数 $F_1 = Q\arcsin\frac{q}{\sqrt{2Q}} + \frac{1}{2}q\sqrt{2Q - q^2}$，求正则变换。设系统的哈密顿函数$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$，试写出以 Q、P 为变量的正则方程。

7－19 已知某单自由度系统的哈密顿函数 $H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$，二组正则变量的关系式为

$$Q = \frac{1}{2}(q^2 + p^2), \quad P = -\arctan\frac{q}{p}$$

试证此变换为正则变换，并求以 Q、P 为变量的哈密顿函数 H^* 和系统的运动方程。

7－20 设二组正则变量的变换式为

$$q = \varphi_1(Q, P), \quad p = \varphi_2(Q, P)$$

则当

$$\frac{\partial(q,p)}{\partial(Q,P)}=1$$

时，上述变换是正则变换，试证明之。

7－21 用正则变换法求平面谐振子的运动，设母函数

$$F_1=\frac{1}{2}m(\omega_1 x^2\cot Q_1+\omega_2 y^2\cot Q_2)$$

式中 ω_1、ω_2 为振子沿 x 和 y 轴的振动频率。

7－22 设一力学系统的哈密顿函数 $H=q+p$，写出其哈密顿—雅可比方程，并证明 $S=-ht+hg-\frac{1}{2}q^2$ 为它的全积分。

7－23 匀质圆盘质量为 m、半径为 r，可以在水平倾角为 α 的斜面上纯滚动。已知初始条件为 $\theta(0)=0$，$\dot{\theta}(0)=\dot{\theta}_0$，这里 θ 是圆盘的转角。试用哈密顿—雅可比方程求出圆盘的运动方程，将 θ 作为 t 的函数解出。

7－24 已知力学系统的哈密顿函数

$$H=p_1^2q_2^2+p_2^2\tan q_2+q_2^2\cos q_1$$

试建立问题的哈密顿—雅可比方程，求其全积分并得到运动规律。

7－25 已知力学系统的哈密顿函数

$$H=\frac{1}{2}(p_1q_2+2p_1p_2+q_1^2)$$

试求它的全积分。

第四篇　非完整系统动力学

第8章　拉格朗日乘子法

8.1　拉格朗日第一类方程

拉格朗日第一类方程是应用数学分析中的乘子法，采用直角坐标形式的普遍方程和约束方程而建立的一组动力学方程。由于方程式的数目多，求解的难度大，所以在一个时期内，它的应用价值远小于第二类拉格朗日方程。随着计算机技术的迅速发展，由于第一类方程易于编程计算，因而计算上的困难已有所解决，目前又逐渐被人们重视和应用。并且，它适用于非完整系统。

设质点系由 n 个质点组成，它有 d 个完整约束和 g 个非完整约束，即

$$f_\alpha(x_1, x_2, x_3, t) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, d) \tag{8.1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{3n} A_{\beta i}\dot{x}_i + D_\beta = 0 \qquad (\beta = 1, 2, \cdots, g) \tag{8.1.2}$$

将以上两式对坐标进行变分，则有

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\delta x_i = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, d) \tag{8.1.3}$$

$$\sum_{i=1}^{3n} A_{\beta i}\delta x_i = 0 \qquad (\beta = 1, 2, \cdots, g) \tag{8.1.4}$$

系统内各质点的运动必须满足动力学普遍方程，即

$$\sum_{i=1}^{3n} (F_i - m_i x_i) \cdot \delta x_i = 0 \tag{8.1.5}$$

在 $3n$ 个直角坐标的变分 $\delta x_i(i=1,2,\cdots,3n)$ 中，由于存在 $(d+g)$ 个约束，因此独立的坐标变分数为 $(3n-d-g)$ 个，至于系统中哪些是独立的坐标变分，则可以任意选择。

将式(8.1.3)和式(8.1.4)统一写成

$$\sum_{i=1}^{3n} A_{\gamma i}\delta x_i = 0 \qquad (\gamma = 1,2,\cdots,d+g) \tag{8.1.6}$$

对于完整系统，其中 $A_{\gamma i}=\dfrac{\partial f_\gamma}{\partial x_i}$ $(\gamma=1,\ 2,\ \cdots,\ d)$。

引入 $(d+g)$ 个待定乘子 λ_γ，分别与式(8.1.6)中各式相乘后求和，并与动力学普遍方程(8.1.5)相加，得

$$\sum_{i=1}^{3n}(F_i - m_i\ddot{x}_i + \sum_{\gamma=1}^{d+g}\lambda_\gamma A_{\gamma i})\delta x_i = 0 \tag{8.1.7}$$

式中 λ_γ 称为**待定乘子或拉格朗日待定乘子**。这样，就把全部约束加于虚位移的限制条件完全嵌入动力学的基本方程。

显然，式(8.1.7)中的 δx_i 是非独立的，如果选取 $(d+g)$ 个待定乘子 λ_γ，使得上式中 $(d+g)$ 个不独立的坐标变分前的系数等于零，从而剩下 $(3n-d-g)$ 个独立的坐标变分。对于独立的坐标变分，其坐标变分前的系数亦应等于零。因此，可以得到 $3n$ 个方程，即

$$F_i - m_i\ddot{x}_i + \sum_{\gamma=1}^{d+g}\lambda_\gamma A_{\gamma i} = 0 \quad (i=1,2,\cdots,3n) \tag{8.1.8}$$

这就是拉格朗日第一类方程。将式(8.1.8)、式(8.1.1)和式(8.1.2)结合起来，共得到 $(3n+d+g)$ 个方程，可解出 $3n$ 个坐标 x_1，$x_2\cdots$，x_{3n}，$(d+g)$ 个乘子 λ_γ。由于在推导方程(8.1.8)时，考虑了系统的全部约束，包括完整的和非完整的，所以拉格朗日第一类方程既适用于完整系统，也适用于非完整系统。

拉格朗日乘子的物理意义如下。

假设质点系只受到一个含时几何约束，约束方程可用式(8.1.1)表示。在此情形下，拉格朗日第一类方程可写成

$$F_i - m_i\ddot{x}_i + \lambda\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ 3n) \tag{8.1.9}$$

另一方面，如果由式(8.1.1)这个约束所引起的约束力为 N_i，则由达

朗伯原理有

$$F_i - m_i \ddot{x}_i + N_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, 3n) \qquad (8.1.10)$$

比较式(8.1.9)和式(8.1.10)，得

$$N_i = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

由此可以看到，约束力与拉格朗日乘子之间的关系。由于系统的约束为理想约束，因此在动力学普遍方程中约束力不会出现，而在拉格朗日第一类方程中约束力通过待定乘子被引入到方程中。当对于实际问题需要计算约束力时，拉格朗日第一类方程则开辟了用分析方法求解这类问题的途径。

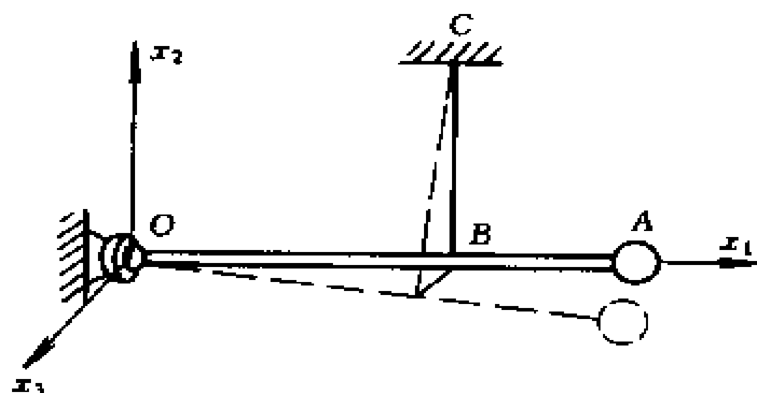


图 8－1－1

例 8－1 图 8－1－1 所示系统中，A 为小球，可以视作质点，质量为 m，OA 为一长 l、质量不计的直杆，BC 为长 h 的软绳，O 为球铰链，$OB = b$。平衡时，OA 在水平位置而 BC 在铅垂位置。求小球 A 的运动微分方程。

解：小球 A 具有一个自由度。设 A 的坐标为 x_1，x_2，x_3，则 B 的坐标为 bx_1/l，bx_2/l，bx_3/l，由于 OA、BC 的长度不变，可列出两个约束方程，即

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - l^2 = 0 \\ f_2 &= \left(\frac{bx_1}{l} - b\right)^2 + \left(\frac{bx_2}{l} - h\right)^2 + \left(\frac{bx_3}{l}\right)^2 - h^2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

由约束方程可知，该系统为完整系统。

小球 A 受到的主动力为重力，沿负 x_2 轴方向，即有

$$F_1 = F_3 = 0, \quad F_2 = -mg$$

将以上三式代入第一类拉格朗日方程(8.1.8)，注意，系统仅受完整约束，且 $d=2$，$A_{\gamma i} = \partial f_\gamma / \partial x_i$，导出 A 的运动微分方程为

$$\left.\begin{aligned} mx_1 &= 2\lambda_1 x_1 + 2b^2(x_1 - l)\lambda_2 \\ mx_2 &= -mg + 2x_2\lambda_1 + 2b(bx_2 - lh)\lambda_2 \\ mx_3 &= 2x_3\lambda_1 + 2b^2 x_3 \lambda_2 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}$$

将方程(a)与方程(b)联立，可确定 A 的运动规律。

例 8-2 质量为 m_1 的质点 A，放在倾角为 α、质量为 m_2 的三角形楔块的斜边上，楔块又可在水平面上滑动，如图 8-1-2 所示。不计摩擦，试用第一类拉格朗日方程求质点和楔块的加速度以及它们所受的约束力。

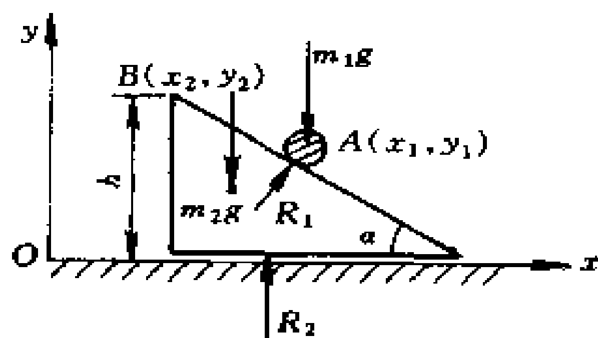


图 8-1-2

解：设质点 A 的坐标为 $A\ (x_1, y_1)$，楔块作直线移动，故只要有一个 x 坐标就可确定其位置，为方便起见，取 B 点坐标 $B\ (x_2, y_2)$ 来代表。故系统的约束方程为

$$f_1 = y_2 - y_1 - (x_1 - x_2)\tan\alpha = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$f_2 = y_2 - h = 0 \qquad \text{(b)}$$

式中 h 为楔块高度，则

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -\tan\alpha, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y_1} = -1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \tan\alpha, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y_2} = 1 \\ &\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = 1 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(c)}$$

由第一类拉格朗日方程，有

$$
\left.\begin{aligned}
m_1\ddot{x}_1 &= \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\\
m_1\ddot{y}_1 &= -m_1g+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y_1}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y_1}\\
m_2\ddot{x}_2 &= \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\\
m_2\ddot{y}_2 &= -m_2g+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y_2}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y_2}
\end{aligned}\right\} \tag{d}
$$

将式(c)代入式(d)，得

$$
\left.\begin{aligned}
m_1\ddot{x}_1 = -\lambda_1\tan\alpha, &\quad m_1\ddot{y}_1 = -m_1g-\lambda_1\\
m_2\ddot{x}_2 = \lambda_1\tan\alpha, &\quad m_2\ddot{y}_2 = -m_2g+\lambda_1+\lambda_2
\end{aligned}\right\} \tag{e}
$$

上述式(a)、式(b)和式(d)等六个方程可求解六个未知量 x_1、y_1、x_2、y_2、λ_1、λ_2 等。

由式(a)和式(b)有

$$
y_1=(x_2-x_1)\tan\alpha, \quad y_2=0 \tag{f}
$$

代入式(e)，得

$$
m_1(\ddot{x}_2-\ddot{x}_1)\tan\alpha=-m_1g-\lambda_1, \quad m_2g=\lambda_1+\lambda_2 \tag{g}
$$

由式(e)解得 $\ddot{x}_1$ 和 $\ddot{x}_2$ 并代入式(g)，得

$$
\lambda_1=-\frac{m_1m_2g\cos^2\alpha}{m_2+m_1\sin^2\alpha}
$$

将上式代入式(g)，得

$$
\lambda_2=m_2g-\lambda_1=\left(m_2+\frac{m_1m_2\cos^2\alpha}{m_2+m_1\sin^2\alpha}\right)g
$$

将 λ_1 代入式(e)，得

$$
\ddot{x}_1=\frac{m_2g\sin\alpha\cos\alpha}{m_2+m_1\sin^2\alpha}
$$

$$
\ddot{y}_1=-\frac{(m_1+m_2)g\sin^2\alpha}{m_2+m_1\sin^2\alpha}
$$

假设质点 A 所受的约束力为 R_1，由于不计摩擦，故 R_1 为垂直

于楔块斜边的法向反力，列出质点 A 在 x 方向的动力学方程为

$$m_1 x_1 = R_1 \sin\alpha$$

此式与式(e)比较知

$$R_1 \sin\alpha = -\lambda_1 \tan\alpha$$

于是得到

$$R_1 = -\frac{\lambda_1}{\cos\alpha} = \frac{m_1 m_2 g \cos\alpha}{m_2 + m_1 \sin^2\alpha}$$

假设楔块所受水平面的约束力为 R_2，列出楔块在 y 方向的动力学方程为

$$m y_2 = R_2 - m_2 g - R_1 \cos\alpha = R_2 - m_2 g + \lambda_1$$

此式与式(e)比较知

$$R_2 = \lambda_2 = \left(m_2 + \frac{m_1 m_2 \cos^2\alpha}{m_2 + m_1 \sin^2\alpha} \right) g$$

8.2 罗司方程

在上一节中给出了适用于非完整系统的拉格朗日第一类方程，由于它是以直角坐标来描述系统的运动，且坐标之间是非独立的。在研究系统所应满足的动力学关系时，除了要考虑运动约束外，还需考虑几何约束。这就使得方程中的变量数增加，而不便求解。如果选取广义坐标来描述系统的运动，这样不仅使得描述系统的参数减少，同时，由于广义坐标彼此独立，无需考虑几何约束，而只需考虑运动约束。从而非常有效地减少了方程中的变量数。这就是本节要介绍的罗司方程。

设系统中同时受到 d 个完整约束和 g 个非完整约束，确定系统位形的广义坐标为 q_1，q_2，…，q_k，无疑，这 k 个广义坐标是彼此独立的。也就意味着 d 个完整约束已被消去，这时，只需考虑非完整约束。用广义坐标表示的 g 个非完整约束可写成

$$\sum_{j=1}^{k} a_{\beta j} \dot{q}_j + d_\beta = 0 \qquad (\beta = 1, 2, \cdots, g)$$

或对坐标进行变分，得

$$\sum_{j=1}^{k} a_{\beta j}\delta q_j = 0 \qquad (\beta = 1,2,\cdots,g) \qquad (8.2.1)$$

利用拉格朗日第二类方程的推导过程，由哈密顿原理出发，由式(5.1.6)知有如下关系成立

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{\partial T}{\partial q_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)+Q_j\right]\delta q_j \mathrm{d}t = 0 \qquad (8.2.2)$$

对于非完整系统，由于 δq_j 是非独立的，它由 g 个运动约束联系着，因此，k 个 δq_j 中只有$(k-g)$个广义坐标的变分是独立的，这就是完整系统和非完整系统的本质差别。于是不能像完整系统那样，直接得到上式中括内的表达式为零的结果，即拉格朗日第二类方程，这也说明了拉格朗日第二类方程只适用于完整系统，而不适用于非完整系统。

为了导出适用于非完整系统以广义坐标表示的运动方程。可以采用乘子法的思想，将式(8.2.1)中 g 个非完整约束分别乘以待定乘子 $\lambda_\beta(\beta=1,2,\cdots,g)$后求和，并从 $t_0 \to t_1$ 积分，即

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\sum_{j=1}^{k}a_{\beta j}\delta q_j \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta a_{\beta j}\right)\delta q_j \mathrm{d}t = 0 \quad (8.2.3)$$

将上式与式(8.2.2)相加，得

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{\partial T}{\partial q_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)+Q_j+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta a_{\beta j}\right]\delta q_j \mathrm{d}t = 0 \quad (8.2.4)$$

值得指出，上式 k 个广义坐标的变分 δq_j 中，是不能任意取值的，其中只有$(k-g)$个是独立的，注意到其中还有 g 个待定乘子 λ_β。因此，可以选取待定乘子 λ_β，使不独立的 g 个 δq_j 前的系数为零。这样其余$(k-g)$个δq_j 则为独立的，这就可以使得 k 个广义坐标的变分 δq_j 任意取值了。于是可得如下方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta a_{\beta j} \quad (j=1,2,\cdots,k) \quad (8.2.5)$$

这就是非完整系统的罗司方程。这个方程组中含有未知量 q_1，q_2，…，q_k 和 λ_1，λ_2，…，λ_g，共有$(k+g)$个。将式(8.2.5)和式(8.2.1)联立恰是$(k+g)$个方程，因此，可以解出所有未知量。

方程中 $\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta a_{\beta j}$ 项的物理意义可理解为，如果解除所有的非完整约束而代之以约束力，这时系统的虚位移只受完整约束的限制，于是在任意虚位移中，非完整约束力将做功。$\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta a_{\beta j}$ 项表示在 $\delta q_j\neq 0$ 而其他广义坐标的变分均为零时，由非完整约束所引起的系统对应于广义坐标 q_j 的广义约束力。

对于更一般的情况，如果系统由 n 个质点组成，有 d 个完整约束和 g 个非完整约束，系统自由度为 k。在某些问题中，为了方便计算，往往选取的广义坐标要多于独立的广义坐标数。在这种情况下，仍然可以利用乘子法，将完整约束加入到方程中去。如果取 $s(s>k)$ 个广义坐标 q_1，q_2，…，q_s 来确定系统的位形，则可以得到如下的动力学方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j+\sum_{\gamma=1}^{d+g}\lambda_\gamma a_{\gamma j}\quad (j=1,2,\cdots,s)\quad(8.2.6)$$

其中，对于完整约束 $a_{\gamma j}=\dfrac{\partial f_\gamma}{\partial q_j}(\gamma=1,2,\cdots,d)$。需要注意，当选取了多余广义坐标后，在写系统的动能和势能或计算广义力时，应把所有多余的(非独立的)坐标同独立的坐标一样看待。在建立运动方程的全过程中均不能利用约束方程从动能、势能或广义力中直接消除非独立的量，亦即在处理上同非完整约束一样。

例 8－3 两质点 A、B 有相同的质量 m，由长为 l 的无重刚杆相连。在点 A 和点 B 处都装有小刀刃支承，使得两点的绝对速度矢必须始终与刚杆相垂直，如图 8－2－1 所示。设系统保持在光滑水平面上运动，且刚杆以匀角速度 ω 转动，试确定系统的运动。

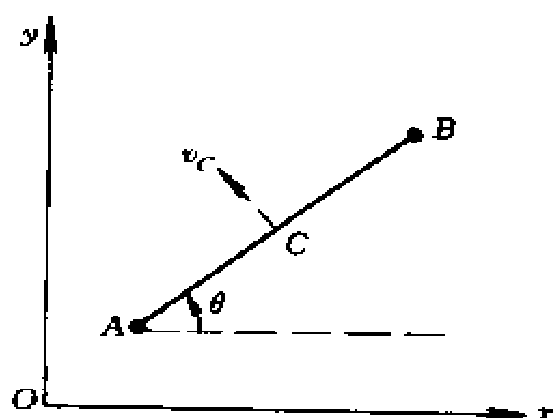


图 8－2－1

解：该系统(作为一个刚体)在水平面内作平面运动。可以取质心 C(即杆的中

点)的坐标 (x_C, y_C) 和 θ 作为确定系统位形的广义坐标。但已知 θ 按预定规律 $\theta = \omega t$ 而变化，故系统的独立广义坐标只有(x_C, y_C)。考虑到小刀刃约束，C 点的绝对速度 $v_C(\dot{x}_C, \dot{y}_C)$也必须与刚杆相垂直，故有约束方程

$$\frac{\dot{x}_C}{\dot{y}_C} = -\tan\theta = -\tan\omega t \text{ 或 } \dot{x}_C\cos\omega t + \dot{y}_C\sin\omega t = 0 \tag{a}$$

式(a)写成微分形式以后，可以证明该约束方程为不可积微分约束，并可写出约束加于系统虚位移的限制条件为

$$\cos\omega t\,\delta x_C + \sin\omega t\,\delta y_C = 0 \tag{b}$$

可见独立广义坐标变分只有一个，因此系统为单自由度非完整系统。

首先写出系统的动能表示式

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{2}J_C\omega^2$$

其中 $M = 2m$，$J_C = \frac{1}{2}ml^2$，故

$$T = m(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{4}ml^2\omega^2 \tag{c}$$

注意，上式中含有 $\dot{x}_C$ 和 $\dot{y}_C$，其中只有一个是独立的，但这里不能利用约束方程(a)直接从式(c)中消去非独立的广义速度。系统所受主动力（重力）为有势力。由于系统始终保持在水平面内运动，故系统的势能函数可以写为 $V = 0$。于是系统的拉格朗日函数

$$L = T - V = T = m(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{4}ml^2\omega^2 \tag{d}$$

对应于约束条件(b)，取不定乘子 λ，而 $a_{11} = \cos\omega t$，$a_{12} = \sin\omega t$。根据方程(8.2.5)可写出系统的运动方程为

$$2mx_C = \lambda\cos\omega t \tag{e}$$

$$2my_C = \lambda\sin\omega t \tag{f}$$

与约束方程(a)联立，共有三个方程，可以确定三个函数 $x_C(t)$、$y_C(t)$和 $\lambda(t)$。

设系统运动的初始条件为

$$
t=0:\quad \left.\begin{array}{ll} x_C=0,\ \dot{x}_C=0 & \\ & \theta=0 \\ y_C=0,\ \dot{y}_C=v_0 & \end{array}\right\} \tag{g}
$$

由式(e)和式(f)消去 λ，得 $y_C/x_C=\tan\omega t$，将此式与约束方程(a)相比，得

$$
y_C/x_C=-\dot{x}_C/\dot{y}_C \text{ 或 } \dot{y}_C y_C+\dot{x}_C x_C=0 \tag{h}
$$

上式可写为$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}_C^2+\dot{y}_C^2)=0$，积分后，得 $\dot{x}_C^2+\dot{y}_C^2=C$，利用初始条件(g)，可得

$$
\dot{x}_C^2+\dot{y}_C^2=v_0^2 \tag{i}
$$

可见，系统质心 C 作匀速运动，即 $v_C=v_0$，又因 $v_C\perp\overline{AB}$，故有 $\dot{x}_C=-v_0\sin\omega t$，$\dot{y}_C=v_0\cos\omega t$，或者写成可积形式

$$
\mathrm{d}x_C=-v_0\sin\omega t\,\mathrm{d}t \tag{j}
$$

$$
\mathrm{d}y_C=v_0\cos\omega t\,\mathrm{d}t \tag{k}
$$

利用初始条件(g)，经积分后，得到确定系统运动的两个函数

$$
x_C=\frac{v_0}{\omega}(\cos\omega t-1),\quad y_C=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \tag{l}
$$

从以上两式消去时间 t，得点 C 的轨迹方程为

$$
\left(x_C+\frac{v_0}{\omega}\right)^2+y_C^2=\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 \tag{m}
$$

可见系统质心 C 作匀速圆周运动，圆心在$(-v_0/\omega,0)$，半径 $r=v_0/\omega$，如图 8-2-2 所示。当 $\theta=\pi/2$ 时，系统正处在图示位置。

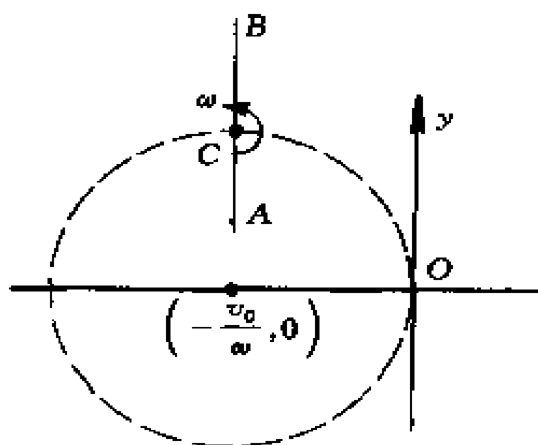


图 8-2-2

将式(k)代入式(e)，得

$$
\lambda=\frac{2mx_C}{\cos\omega t}=-2mv_0\omega
$$

在本例中，质心 C 的全加速度即其向心加速度 $a_C^{(n)}=v_0^2/r=v_0\omega$。根据质心运动定理，$Ma_C^{(n)}=R$，其中 R 为系统所受约束反力的模。由此可得

$$R = Ma_C^{(n)} = (2m)v_0\omega = 2m\omega v_0 \tag{n}$$

可见，不定乘子 λ 的绝对值与约束反力的值相等。而反力的方向始终与 $a_C^{(n)}$ 一致。因点 C 相对于圆心的角速度 $\omega' = v_0/r = \omega$，故杆 AB 在运动中始终沿点 C 轨迹的半径。可见，两个小刀刃处的全反力 R 始终沿 AB 杆并指向圆心。

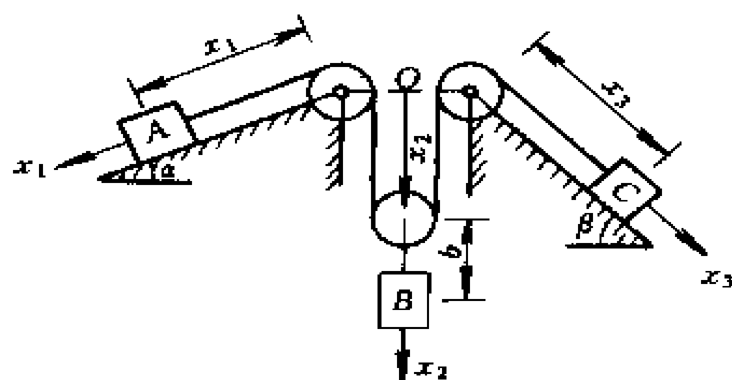


图 8－2－3

例 8－4　图 8－2－3 所示系统，A、B、C 物块质量均为 m，用一不可伸长的轻绳通过滑轮系住。各滑轮质量不计，A、C 物块分别放在倾角为 α 和 β 的光滑斜面上。B 物块吊在动滑轮上，不能在铅垂方向运动。试求各物块的加速度。

解： 系统为完整系统，具有两个自由度，为方便计算，选 x_1、x_2、x_3 为广义坐标，显然有一个坐标是多余的、不独立的；设绳长为 l，系统的约束方程为

$$f = x_1 + 2x_2 + x_3 + d - l = 0 \tag{a}$$

式中 d 为常数。

系统动能

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)$$

取过 O 点水平面为重力零势面，系统的势能

$$V = -mg(x_1\sin\alpha + x_2 + b + x_3\sin\beta)$$

故拉格朗日函数

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + mg(x_1\sin\alpha + x_2 + b + x_3\sin\beta)$$

取待定乘子 λ，而

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 1$$

然后代入式(8.2.6)，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=\lambda\frac{\partial f}{\partial q_j}\qquad (j=1,2,3)$$

则得

$$mx_1=mg\sin\alpha+\lambda \tag{b}$$

$$mx_2=mg+2\lambda \tag{c}$$

$$mx_3=mg\sin\beta+\lambda \tag{d}$$

由式(a)，有

$$x_1+2x_2+x_3=0 \tag{e}$$

将式(b)、式(c)、式(d)和式(e)联立求解，得

$$x_1=\frac{g}{6}(5\sin\alpha-\sin\beta-2)$$

$$x_2=\frac{g}{3}(1-\sin\alpha-\sin\beta)$$

$$x_3=\frac{g}{6}(5\sin\beta-\sin\alpha-2)$$

$$\lambda=-\frac{mg}{6}(\sin\alpha+\sin\beta+2)$$

由上述方程可以看出，λ 就是绳子的拉力。

习　　题

8－1　如题 8－1 图所示，设各滑轮的质量以及摩擦不计，并设绳子是不可伸长的。试用拉格朗日第一类方程求绳子的张力和 m_1 的加速度。

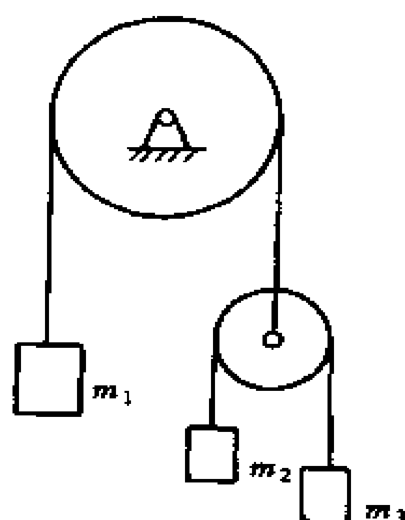
8－2　试建立球面摆的拉格朗日第一类方程，并用于分析摆在平衡位置 Oz 处附近的微振动。已知摆长为 l，其质量为 m，如题 8－2 图所示。初始条件为 $t=0$ 时，$x=x_0$，$y=0$，$\dot{x}=0$，$\dot{y}=v_0$（x_0,v_0 为一阶小量）。

8－3　一半径为 r 的圆环，质量为 m，沿倾角为 α 的固定斜面无滑动地滚动，如题 8－3 图所示。试用拉格朗日第一类方程求圆环的运动规律及斜面的约束反力。

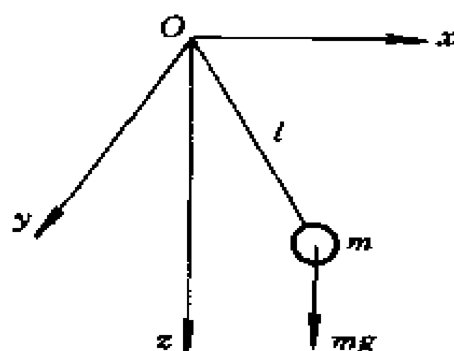
8－4 一质量为 m 的质点在重力作用下运动，它的运动受有

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2-\frac{a^2}{b^2}\dot{z}^2=0$$

的非完整约束，试用罗司方程建立该系统的运动微分方程，并求出不定乘子 λ。

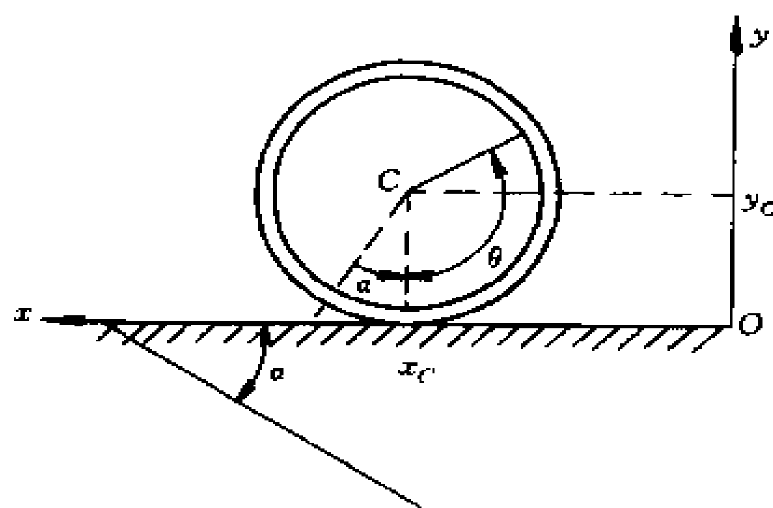


题 8－1 图

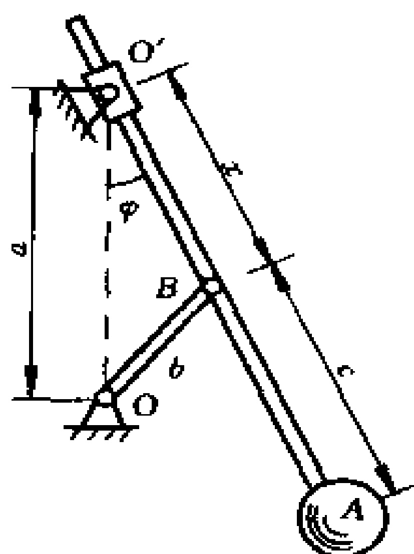


题 8－2 图

8－5 希立克测振仪如题 8－5 图所示。若只考虑均质圆球 A 的质量 m 及其对对称轴的转动惯量 J_A，忽略所有杆件的质量，试以 φ、x 为坐标写出系统的罗司方程。



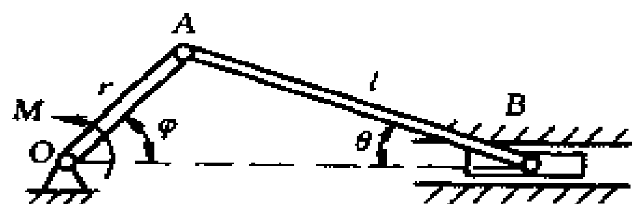
题 8－3 图



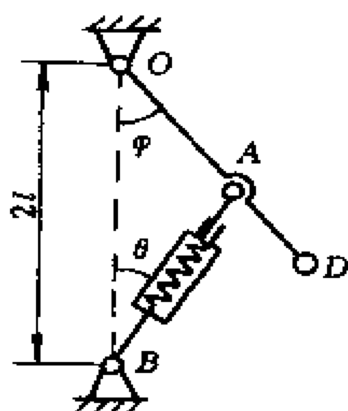
题 8－5 图

8－6 题 8－6 图所示机构中，曲柄 OA、连杆 AB 视作均质杆，长度分别为 r、l，质量分别为 m_1、m_2；滑块 B 的质量不计。试以 φ、θ 为坐标写出系统的罗司方程。

8－7 质量为 m 的单摆D 由不计质量的OD 杆连接，可绕 O 转动，杆上点 A 与支点B 以一劲度系数为k、原长为 l_0 的弹簧连接，如题 8－7 图所示。设 $OA=l$，$OD=L$，$OB=2l$。试以 φ 和 ρ($\rho=AB$)为坐标，写出单摆 D 的罗司方程。



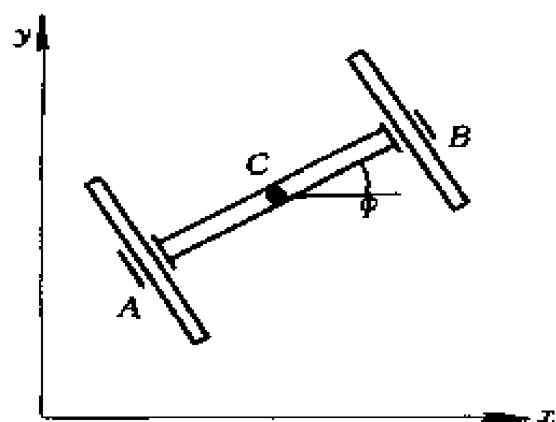
题 8－6 图



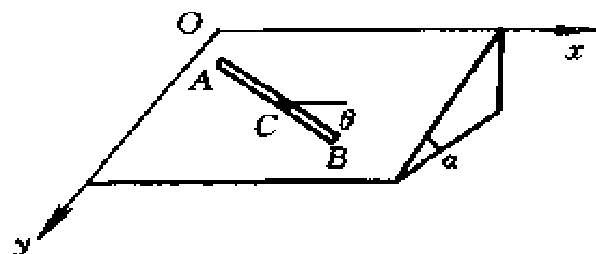
题 8－7 图

8－8 车轮 A 与B 以长 $2l$ 的轴通过轴承连接后置于地面上，如题 8－8 图所示。设轮子与地面间有足够的摩擦力阻止其相对滑动，以 AB 中点C 的坐标x_C、y_C，AB 与x 轴的夹角φ 以及A、B 两轮的转角 θ_A 和θ_B 为广义坐标。(1) 写出系统的约束方程；(2) 设轮子的质量为 m，AB 轴的质量不计，开始时 $x_C=y_C=0$，$\dot{x}_C=0$，$\dot{y}_C=v$，$\varphi=0$，$\dot{\varphi}=\omega$，试用罗司方程求出 C 点的运动方程；(3) 证明 C 点的轨迹为半径等于 v/ω 的圆。

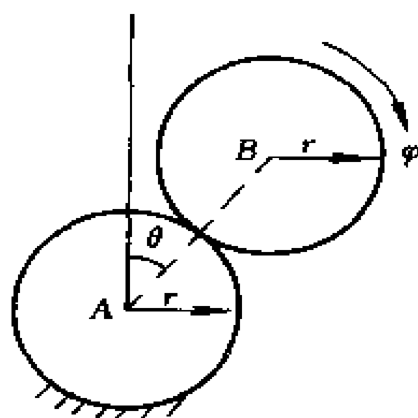
8－9 冰刀在倾角为 α 的冰面上运动。设冰刀可以简化为 AB 杆，而其中点 C 的速度始终沿着AB 方向，如题 8－9 图所示。已知 $t=0$ 时，C 点位于坐标原点而其速度为零，同时 $\theta=0$，$\dot{\theta}=\omega$，试用罗司方程求证 C 点的运动方程为



题 8－8 图



题 8－9 图



题 8－10 图

$$x_C=\frac{g\sin\alpha}{2\omega^2}(2\sin\omega t-\omega t-\sin\omega t\cos\omega t)$$

$$y_C=\frac{g\sin\alpha}{2\omega^2}(1-\cos\omega t)^2$$

8－10　质量为 m、半径为 r 的均质圆球 B，放在半径亦为 r 的固定球面的顶点，B 球受一微小扰动后，从平衡位置 $\theta=0$ 开始滚动，如题 8－10 图所示，设球面的滑动摩擦系数 $f=0.5$，试用罗司方程求 B 球开始滑动的 θ 角。

第9章 阿沛尔方程

对于非完整系统而言，由于受到非完整约束，使得广义速度彼此为非独立的。为了取得独立的广义速度，在阿沛尔方程中引入了独立的速度变量，此变量称为**伪速度**。通过伪速度与广义速度之间的变换关系，得到既适用于完整系统，也适用于非完整系统的阿沛尔方程。

9.1 伪速度的概念

考察具有 n 个质点的非完整系统，其位形由 k 个独立的广义坐标 q_1，q_2，…，q_k 表示，受到 g 个非完整约束，即

$$\sum_{j=1}^{k} a_{\beta j}\dot{q}_j + a_\beta = 0 \quad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{9.1.1}$$

非完整约束加于广义坐标虚位移的限制条件是

$$\sum_{j=1}^{k} a_{\beta j}\delta q_j = 0 \quad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{9.1.2}$$

则系统独立的广义速度的数目 $f=k-g$。

阿沛尔提出，在建立系统的动力学方程时，不采用非独立的广义速度 $\dot{q}_j(j=1,2,\cdots,k)$，而是引入独立的 $f=k-g$ 个变量 $\dot{\pi}_\gamma$，并构造如下变换关系：

$$\dot{\pi}_\gamma = \sum_{j=1}^{k} u_{\gamma j}\dot{q}_j + u_\gamma \qquad (\gamma = 1,2,\cdots,f) \tag{9.1.3}$$

式中 $\dot{\pi}_\gamma$ 称为**伪速度**。$u_{\gamma j}$ 一般为广义坐标 q_1，q_2，…，q_k 和时

间 t 的函数，f 个独立的变量 π_γ 是 k 个广义速度 $\dot{q}_j$ ($j=1,2,\cdots,k$) 的独立线性组合。由于 $\dot{\pi}_\gamma$ 是人为构造的或任意选定的，因此它不一定是函数 $\pi_\gamma(q,t)$ 对 t 的全导数，也就是说函数 $\pi_\gamma(q,t)$ 及其导数 π_γ 之间的关系并不一定存在，这也是把 $\dot{\pi}_\gamma$ 称为伪速度的原因，同时对应地称 π_γ ($\gamma=1,2,\cdots,f$) 为**伪坐标**。

将变换式(9.1.3)和约束方程(9.1.1)联立，可以得到 $f+g=k$ 个关于变量 $\dot{q}_j$ ($j=1,2,\cdots,k$) 的线性代数方程组。若其系数行列式 $D\neq 0$，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & q_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{g1} & \cdots & a_{gk} \\ u_{11} & \cdots & u_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{(k-g)1} & \cdots & u_{(k-g)k} \end{vmatrix}\neq 0$$

则可从这 k 个方程中解出 k 个 $\dot{q}_j$ ($j=1,2,\cdots,k$) 用 f 个 $\dot{\pi}_\gamma$ ($\gamma=1,2,\cdots,f$) 表示，即

$$\dot{q}_j=\sum_{\gamma=1}^{f}h_{\gamma j}\dot{\pi}_\gamma+h_{0j}\qquad(j=1,2,\cdots,k)\qquad(9.1.4)$$

式中 $h_{\gamma j}$ 和 h_{0j} 一般为广义坐标 q_1，q_2，$\cdots$，q_k 和时间 t 的函数。由于式(9.1.4)中已嵌入了全部的非完整约束，因此，式中 $\dot{\pi}_\gamma$ ($\gamma=1,2,\cdots,f$) 是彼此独立的，即可以任意取值。

同时，可以把非完整约束式(9.1.1)看成是广义速度与取值为零的伪速度之间的变换关系，于是可将非完整系统看成是有 $(k-g)$ 个非零伪速度，其余 g 个伪速度恒等于零。因此，系统中含有的非完整约束条件越多，非零伪速度越少，亦即用以描述系统的独立的参数变分就越少，这就是引入伪速度的优越性。

9.2 阿沛尔方程

9.2.1 阿沛尔方程

设系统由 n 个质点组成，受到 d 个完整约束和 g 个非完整约束，其独立的广义坐标数为$(3n-d)$个。动力学普遍方程为

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i - m_i\boldsymbol{a}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0 \tag{9.2.1}$$

将 $\delta\boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$ 代入上式，得

$$\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{a}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j = 0 \tag{9.2.2}$$

上式括号中的第一项为系统的广义力，即

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = Q_j \qquad (j = 1,2,\cdots k) \tag{9.2.3}$$

对于第二项，首先计算$\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$。由于

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \cdots, q_k, t) \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

将上式两边对时间 t 求导，得

$$\boldsymbol{v}_i = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{a}_i = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{k}\left[\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial}{\partial q_l}\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)\dot{q}_l\dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_i}\right)\dot{q}_j + \frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\ddot{q}_j\right] + \frac{\partial^2\boldsymbol{r}_i}{\partial t^2}$$

$$(i = 1,2,\cdots n)$$

由于 $\boldsymbol{r}_i$ 仅是 q_i 和 t 的函数，因此将上式两边对 q_j 求偏导，有如下等式成立

$$\frac{\partial\boldsymbol{a}_i}{\partial\ddot{q}_j} = \frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \tag{9.2.4}$$

将上式代入式(9.2.2)的第二项，得

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{a}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{a}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_i\right) = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{a}_i^2\right) \tag{9.2.5}$$

令

$$G = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{a}_i^2 \tag{9.2.6}$$

由于此式形如动能，因此，称其为**加速度能量**。将式(9.2.3)、式(9.2.5)和式(9.2.6)代入式(9.2.2)，得

$$\sum_{j=1}^{k}\left(Q_j - \frac{\partial G}{\partial q_j}\right)\delta q_j = 0 \tag{9.2.7}$$

由上述推导过程可知，该式对于完整系统和非完整系统都是适用的。

若为完整系统，广义坐标的变分$\delta q_j\,(j=1,2,\cdots,k)$是彼此独立的。于是欲使式(9.2.7)成立，则有$\delta q_j\,(j=1,2,\cdots,k)$前的系数应为零，即

$$Q_j = \frac{\partial G}{\partial q_j} \qquad (j = 1,2,\cdots,k) \tag{9.2.8}$$

这是完整系统的**阿沛尔方程**。

若为非完整系统，由于广义坐标的变分$\delta q_j\,(j=1,2,\cdots,k)$还需满足如下关系：

$$\sum_{j=1}^{k} a_{\beta j}\delta q_j = 0 \qquad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{9.2.9}$$

于是，独立的广义速度只有$(k-g)$个。因此，引入 $f=k-g$ 个伪速度，由式(9.1.4)知

$$\dot{q}_j = \sum_{\gamma=1}^{f} h_{\gamma j}\dot{\pi}_\gamma + h_{0j} \qquad (j = 1,2,\cdots,k) \tag{9.2.10}$$

则广义坐标的变分表达式为

$$\delta q_j = \sum_{\gamma=1}^{f} h_{\gamma j}\delta\pi_\gamma \tag{9.2.11}$$

将上式代入式(9.2.7)，得

$$\sum_{j=1}^{k}\left(Q_j-\frac{\partial G}{\partial \ddot{q}_j}\right)\sum_{\gamma=1}^{f}h_{\gamma j}\delta\pi_\gamma = 0$$

或交换求和次序有

$$\sum_{\gamma=1}^{f}\left[\sum_{j=1}^{k}\left(Q_j h_{\gamma j}-\frac{\partial G}{\partial \ddot{q}_j}h_{\gamma j}\right)\right]\delta\pi_\gamma = 0 \qquad (9.2.12)$$

令

$$\Pi_\gamma = \sum_{j=1}^{k}Q_j h_{\gamma j} \qquad (9.2.13)$$

Π_γ 称为对应于伪坐标 π_γ 的**广义力**。将式(9.2.10)对 t 求导，得

$$\ddot{q}_j = \sum_{\gamma=1}^{f}\left(h_{\gamma j}\ddot{\pi}_\gamma+\frac{\mathrm{d}h_{\gamma j}}{\mathrm{d}t}\dot{\pi}_\gamma\right)+\frac{\mathrm{d}h_{0j}}{\mathrm{d}t}$$

再由上式两边对 $\ddot{\pi}_\gamma$ 求偏导，由于$\frac{\mathrm{d}h_{\gamma j}}{\mathrm{d}t}$和$\frac{\mathrm{d}h_{0j}}{\mathrm{d}t}$一般为广义坐标 q_1，q_2，…，q_k 和时间 t 的函数，于是有

$$\frac{\partial \ddot{q}_j}{\partial \ddot{\pi}_\gamma} = h_{\gamma j}$$

将上式和式(9.2.13)代入式(9.2.12)，得

$$\sum_{\gamma=1}^{f}\left(\Pi_\gamma-\frac{\partial G}{\partial \ddot{\pi}_\gamma}\right)\cdot\delta\pi_\gamma = 0$$

由于此处$\delta\pi_\gamma(\gamma=1,2,\cdots,f)$是彼此独立的，因此有

$$\Pi_\gamma = \frac{\partial G}{\partial \ddot{\pi}_\gamma} \qquad (\gamma = 1,2,\cdots,f) \qquad (9.2.14)$$

这是非完整系统的阿沛尔方程。与完整系统的阿沛尔方程相比较，称 Π_γ 为对应于伪坐标$k\pi_\gamma$ 的广义力。

现在来讨论 Π_γ 的计算。由于作用于系统的全部主动力的虚功之和

$$\delta W = \sum_{j=1}^{k}Q_j\delta q_j$$

将式(9.2.11)代入，得

$$\delta W = \sum_{j=1}^{k} Q_j \delta q_j = \sum_{j=1}^{k} Q_j \sum_{\gamma=1}^{f} h_{\gamma j} \delta \pi_\gamma = \sum_{\gamma=1}^{f} \Pi_\gamma \delta \pi_\gamma \tag{9.2.15}$$

也就是说，对应于伪坐标 π_γ 的广义力 Π_γ 可从计算系统全部主动力的虚功之和来得到。

阿沛尔方程形式简单，其描述系统的方程数等于系统的自由度数。但是，加速度能的计算较复杂，因其涉及到系统加速度的计算。下面给出刚体作不同运动时加速度能的计算方法。

9.2.2 刚体——加速度能的计算方法

9.2.2.1 平动刚体

由于刚体作平动时刚体上各点的加速度相同，因此加速度能

$$G = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{a}_i^2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_C^2 \sum_{i=1}^{n} m_i = \frac{1}{2} M \boldsymbol{a}_C^2 \tag{9.2.16}$$

9.2.2.2 定轴转动刚体

由图 9－2－1 可见，转动刚体上某点的加速度可写成 $\boldsymbol{a}_i^2 = (\boldsymbol{r}_i\varepsilon)^2 + (\boldsymbol{r}_i\omega^2)^2$，于是

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{a}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i (\boldsymbol{r}_i^2 \varepsilon^2 + \boldsymbol{r}_i^2 \omega^4) \\ &= \frac{1}{2}(\varepsilon^2 + \omega^4)\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i^2 = \frac{1}{2} J_z (\varepsilon^2 + \omega^4) \end{aligned} \tag{9.2.17}$$

式中 J_z 为刚体对转轴 Oz 的转动惯量，ω 和 ε 分别为刚体转动的角速度和角加速度。

9.2.2.3 平面运动刚体

设刚体质心为 C，刚体上任一点(即质量单元)的质量为 m_i，

由图 9－2－2 可知

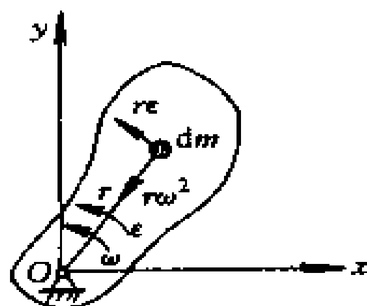


图 9－2－1

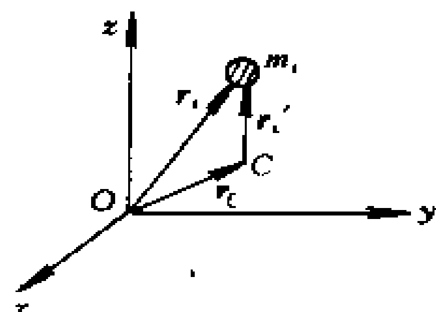


图 9－2－2

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{r}'_i$$

且
$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \ddot{\boldsymbol{r}}_C + \ddot{\boldsymbol{r}}'_i$$

则系统的加速度能

$$G = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{a}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\ddot{\boldsymbol{r}}_C + \ddot{\boldsymbol{r}}'_i)\cdot(\ddot{\boldsymbol{r}}_C + \ddot{\boldsymbol{r}}'_i)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_C^2 + \ddot{\boldsymbol{r}}_C \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}'_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}'^2_i \tag{9.2.18}$$

由质心的坐标公式 $\boldsymbol{r}_C = \dfrac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i$ 可知，上式中的第二项等于零，于是式(9.2.18)可写成

$$G = \frac{1}{2}M\boldsymbol{a}_C^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{a}'^2_i \tag{9.2.19}$$

式中 $\boldsymbol{a}_C$ 为刚体质心的加速度，$\boldsymbol{a}'_i$ 为第 i 个质点相对质心的加速度，M 为刚体的总质量。

若将刚体的平面运动分解为随质心的平动和绕质心的转动，则上式可进一步写成

$$G = \frac{1}{2}M\boldsymbol{a}_C^2 + \frac{1}{2}J_C(\varepsilon^2 + \omega^4) \tag{9.2.20}$$

应该注意，加速度能需用伪速度和伪加速度来表示，即$G=G(\pi,\dot{\pi},q,t)$。由于伪速度定义为广义速度的线性组合，因此，在实际应用时具有较大的灵活性，取怎样的线性组合为宜，并无规律可循。

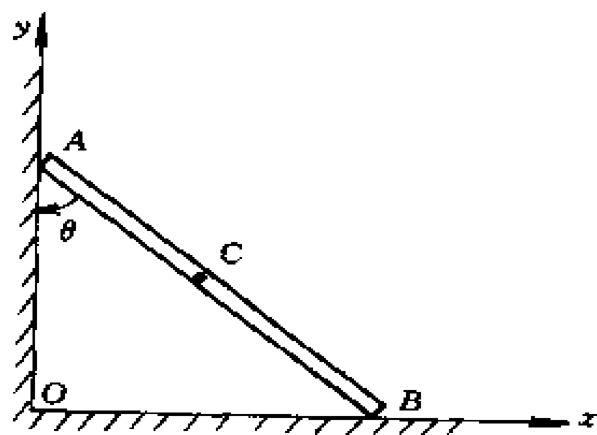


图 9－2－3

例 9－1 均质细杆AB长$2a$，质量为M，其两端被分别限制沿坐标轴滑动，如图 9－2－3 所示。不计摩擦，试求在重力作用下的运动。

解：图示系统为单自由度完整系统。取θ作为系统的广义坐标，有变换式

$$x_C = a\sin\theta, \quad y_C = a\cos\theta, \tag{a}$$

由此得

$$\dot{x}_C = a\dot{\theta}\cos\theta, \dot{y}_C = -a\dot{\theta}\sin\theta \tag{b}$$

取伪速度

$$\dot{\pi} = a\dot{\theta} \tag{c}$$

于是式(b)可以用伪速度表示为

$$\dot{x}_C = \dot{\pi}\cos\theta, \quad \dot{y}_C = -\dot{\pi}\sin\theta \tag{d}$$

从而有

$$x_C = \pi\cos\theta - \dot{\pi}\dot{\theta}\sin\theta, \quad y_C = -\pi\sin\theta - \dot{\pi}\dot{\theta}\cos\theta \tag{e}$$

由式(c)有

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{\pi}}{a}, \quad \ddot{\theta} = \frac{\pi}{a} \tag{f}$$

将式(f)代入式(e)，同理，将质心的加速度也用伪加速度表示，得

$$x_C = \pi\cos\theta - \frac{\dot{\pi}^2}{a}\sin\theta, \qquad y_C = -\left(\pi\sin\theta + \frac{\dot{\pi}^2}{a}\cos\theta\right) \tag{g}$$

现在利用式(9.2.20)计算系统的加速度能 G，则 AB 杆的加速度能可写为

$$G = \frac{1}{2}M(x_C^2 + y_C^2) + \frac{1}{2}J_C(\ddot{\theta}^2 + \dot{\theta}^4) \tag{h}$$

式中 $J_C = \frac{1}{3}Ma^2$。将式(g)代人上式，并考虑到式(f)，得

$$G = \frac{2}{3}M\pi^2 + [\text{与伪加速度 } \pi \text{ 无关的项}] \tag{i}$$

现在计算对应于伪速度 $\dot{\pi}$ 的广义力 Π。由式(9.2.15)可知，广义力 Π 可通过计算系统的全部主动力的虚功之和来得到。主动力的虚功可写为

$$\delta W = Mg\delta y_C \tag{j}$$

由式(b)和式(c)知

$$\delta x_C = a\cos\theta\delta\theta, \quad \delta y_C = -a\sin\theta\delta\theta \tag{k}$$

及

$$\delta\theta = \frac{1}{a}\delta\pi \tag{l}$$

故

$$\delta y_C = -a\sin\theta\frac{1}{a}\delta\pi = -\sin\theta\delta\pi \tag{m}$$

将上式代入式(j)，得

$$\delta W = -Mg\sin\theta\delta\pi \tag{n}$$

根据式(9.2.15)，可知对应于伪坐标 π 的广义力

$$\Pi = -Mg\sin\theta \tag{o}$$

将式(i)和式(o)代人阿沛尔方程(9.2.14)，得到系统的运动方程

$$\frac{4}{3}M\pi = -Mg\sin\theta$$

或
$$\dot{\pi} = -\frac{3}{4}g\sin\theta \tag{p}$$
将上式与式(c)联立即可解得 $\theta(t)$，从而得到$\dot{\pi}(t)$。

由式(c)和式(f)，得
$$\ddot{\theta} = -\frac{3g}{4a}\sin\theta \tag{q}$$
可见 AB 杆的运动规律$\theta(t)$服从类似于大幅度单摆的运动微分方程。

应用拉格朗日方程可以得到与式(q)相同的结果。当然在本例中，伪速度完全可以取为广义速度 $\dot{\theta}$。

例 9－2 试应用阿沛尔方程列出例 8－3 中所给定系统的运动方程，讨论方程的积分。假定$\theta(t)$是未知函数。

解：选取(x_C, y_C, θ)作为系统的独立广义坐标。系统具有非完整约束
$$\dot{x}_C\cos\theta + \dot{y}_C\sin\theta = 0 \tag{a}$$
约束加于系统虚位移的限制条件为
$$\cos\theta\delta x_C + \sin\theta\delta y_C = 0 \tag{b}$$
可见该系统是两自由度的非完整系统。现取定两个伪速度 $\dot{\pi}_1$ 和 $\dot{\pi}_2$ 为广义速度$(\dot{x}_C, \dot{y}_C, \dot{\theta})$的下列线性组合
$$\dot{\pi}_1 = \dot{\theta} \tag{c}$$
$$\dot{\pi}_2 = -\dot{x}_C\sin\theta + \dot{y}_C\cos\theta \tag{d}$$

将式(a)、式(c)及式(d)联立，得关于广义速度 $\dot{x}_C$、$\dot{y}_C$ 和 $\dot{\theta}$ 的线性代数方程组。由此系数行列式
$$D = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \tag{e}$$
可将各广义速度解出并用独立的伪速度 $\dot{\pi}_1$ 和 $\dot{\pi}_2$ 表示为

$$\dot{x}_C = -\dot{\pi}_2\sin\theta, \quad \dot{y}_C = \dot{\pi}_2\cos\theta, \quad \dot{\theta} = \dot{\pi}_1 \tag{f}$$

于是系统的虚位移可以用独立的伪速度坐标变分表示为

$$\delta x_C = -\sin\theta\delta\pi_2, \quad \delta y_C = \cos\theta\delta\pi_2, \quad \delta\theta = \delta\pi_1 \tag{g}$$

另外，由式(f)可得

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_C &= -\ddot{\pi}_2\sin\theta - \dot{\pi}_1\dot{\pi}_2\cos\theta \\ \ddot{y}_C &= \ddot{\pi}_2\cos\theta - \dot{\pi}_1\dot{\pi}_2\sin\theta \\ \ddot{\theta} &= \ddot{\pi}_1 \end{aligned}\right\} \tag{h}$$

现在先来计算系统的加速度能，即

$$G = \frac{1}{2}(2m)(\ddot{x}_C^2 + \ddot{y}_C^2) + \frac{1}{2}J_C(\ddot{\theta}^2 + \dot{\theta}^4) \tag{i}$$

将式(h)代入上式，得

$$G = \frac{1}{2}(2m)\ddot{\pi}_2^2 + \frac{1}{2}J_C\ddot{\pi}_1^2 + [\text{与伪加速度 } \ddot{\pi}_r \text{ 无关的项}] \tag{j}$$

根据式(9.2.15)，系统所受主动力的虚功可表示为

$$\delta W = \Pi_1\delta\pi_1 + \Pi_2\delta\pi_2 \tag{k}$$

这里主动力为重力。对于保持在水平面内运动的质点系，重力在系统任何虚位移上的虚功和都等于零，即 $\delta W = 0$。考虑到 $\delta\pi_1$ 和 $\delta\pi_2$ 为彼此独立的变分，必有

$$\Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0 \tag{l}$$

将式(j)和式(l)代入阿沛尔方程(9.2.14)，得系统的运动方程为

$$J_C\ddot{\pi}_1 = 0 \tag{m}$$

$$m\ddot{\pi}_2 = 0 \tag{n}$$

或

$$\ddot{\pi}_1 = 0, \quad \ddot{\pi}_2 = 0 \tag{o}$$

将以上两个方程与约束方程(a)及线性组合式(c)和(d)联立，共有五个方程，可以解出三个未知函数 $x_C(t)$、$y_C(t)$ 和 $\theta(t)$ 及两个伪速度 $\dot{\pi}_1(t)$ 及 $\dot{\pi}_2(t)$。

设运动初始条件为

$$\left.\begin{array}{l} t=0: \quad x_C=0, \quad y_C=0, \quad \theta=0 \\ \dot{x}_C=0, \quad \dot{y}_C=v_0, \quad \dot{\theta}=\omega(\text{常数}) \end{array}\right\}$$

积分方程(o)，并考虑到给定的初始条件，得

$$\dot{\pi}_1=\omega, \quad \dot{\pi}_2=v_0$$

根据式(f)，有

$$\dot{\theta}=\omega$$

从而得到

$$\dot{x}_C=-v_0\sin\omega t, \quad \dot{y}_C=v_0\cos\omega t, \quad \theta=\omega t$$

前两式积分后，得

$$x_C=\frac{v_0}{\omega}(\cos\omega t-1), \quad y_C=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

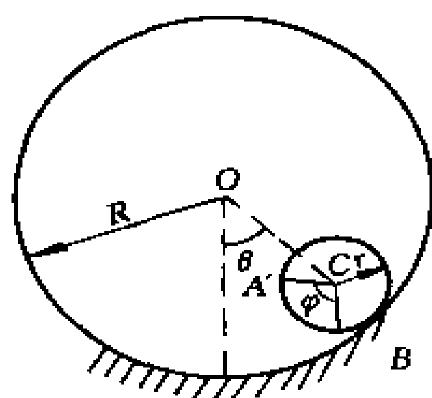
这一结果同例 8－3 所得完全一致，但在阿沛尔方程中没有出现任何类似罗司方程中的广义约束力项，且方程的形式极为简单。从本例还可看出，与第一个伪速度 $\dot{\pi}_1$ 对应的伪坐标 π_1 实际上就是广义坐标 θ，因而它也是真坐标，即 $\pi_1=\theta$，伪速度 $\dot{\pi}_1$ 就是函数 π_1 对 t 的全导数。而第二个伪速度 $\dot{\pi}_2$ 却不是某个函数对 t 的全导数，因为实际上找不到这样一个函数 $\pi_1(x_C, y_C, \theta, t)$，它对 t 的全导数正好等于 $(-\dot{x}_C\sin\theta+\dot{y}_C\cos\theta)$，所以 π_2 是实质上的伪坐标，$\dot{\pi}_2$ 也是实质上的伪速度。

习　　题

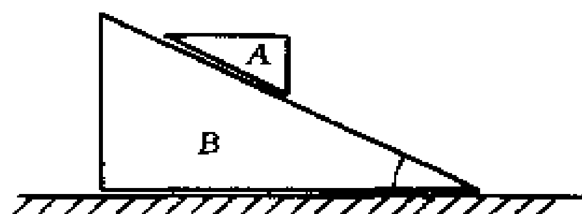
9－1　质量为 m、半径为 r 的实心圆柱，在一半径为 R 的固定的空心圆柱内作纯滚动，如题 9－1 图所示。试用阿沛尔方程求圆柱的运动方程和微振动周期。

9－2　三棱柱 A 可沿三棱柱 B 的光滑斜而滑动，而 B 又可在光滑的水平面上滑动，如题 9－2 图所示。设 A、B 各重为 P

和 Q，开始时系统静止，试用阿沛尔方程求三棱柱 B 的加速度。



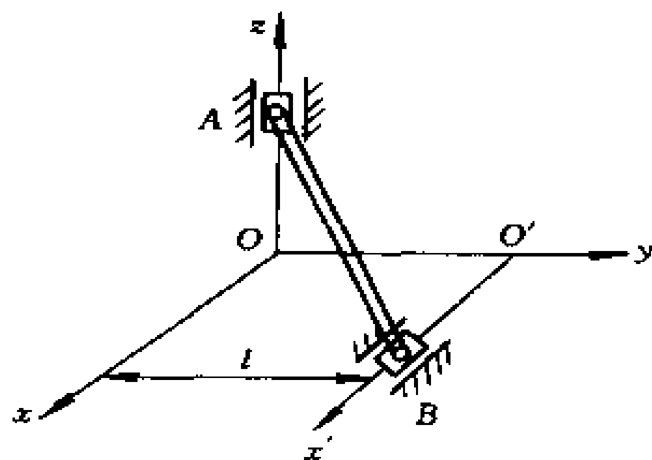
题 9-1 图



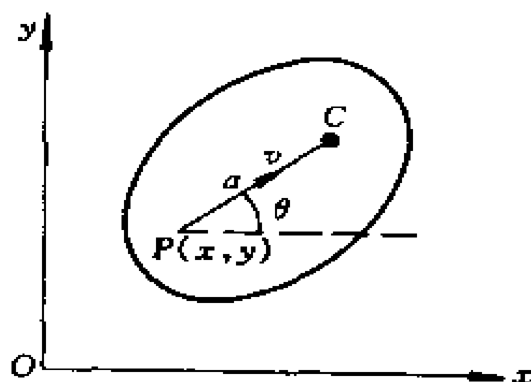
题 9-2 图

9－3 质量为 m、长为 $2l$ 的均质直杆 AB，其两端分别沿着光滑的铅垂轴 Oz 与水平轴 $O'x'$ 运动，如题 9－3 图所示。$O'x' /\!/ Ox$，两平行轴之间距离为 l，试用阿沛尔方程写出 A 的运动微分方程。

9－4 试用阿沛尔方程推导出刚体平面运动微分方程。



题 9－3 图



题 9－5 图

9－5 已知平板质量为 m，绕其质心的转动惯量为 J，平板在 P 处装有刀刃，使得 P 点运动时受有非完整约束 $\dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta = 0$，$\theta$ 为 P 点到质心 C 点连线与 Ox 轴的夹角，$PC = a$。

试用阿沛尔方程建立平板的运动微分方程。（取$\dot{\pi}_1 = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = v$，$\dot{\pi}_2 = \dot{\theta}$作为伪速度。）

第 10 章　凯恩方程

凯恩方程与阿沛尔方程从本质上讲，具有相似的思路，都是构造一组独立的速度变量来代替非完整系统不独立的速度变量。由此建立起既适用于完整系统，又适用于非完整系统的动力学方程。所不同的是，凯恩方程通过引入偏速度和偏角速度的概念，使得运动方程由形式简单的广义主动力和广义惯性力表示。避免了在阿沛尔方程中计算较抽象的加速度能。由于广义主动力和广义惯性力有较清楚的物理意义，且计算步骤程式化，因此，为用计算机语言推导提供了方便。这对于计算机技术迅速发展的今天，显示了利用凯恩方程解决大型复杂动力学问题的优越性。

10.1　偏速度和偏角速度

考察具有 n 个质点的非完整系统，受到 d 个完整约束和 g 个非完整约束，则系统独立的坐标变分数为 $3n-d-g=f$ 个，即系统的自由度为 f。系统中每一个质点 M_i 的矢径可用广义坐标表示，即

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_1,q_2,\cdots q_k,t)\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{10.1.1}$$

由此可写出该质点的速度

$$\boldsymbol{v}_i=\dot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{10.1.2}$$

令 $\boldsymbol{u}_{ij}=\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$，$\boldsymbol{u}_{i0}=\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}$，则上式可写成

$$\boldsymbol{v}_i=\dot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{u}_{ij}\dot{q}_j+\boldsymbol{u}_{i0}\tag{10.1.3}$$

式中 $\boldsymbol{u}_{ij}$ 和 $\boldsymbol{u}_{i0}$ 通常是广义坐标 q 和时间 t 的函数。

对于刚体系统，类似地可以把第 i 各刚体 D_i 的瞬时角速度 $\boldsymbol{\omega}_i$ 也用广义速度表示为

$$\boldsymbol{\omega}_i = \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{\omega}_{ij}\dot{q}_j + \boldsymbol{\omega}_{i0} \tag{10.1.4}$$

式中 $\boldsymbol{\omega}_{ij}$ 和 $\boldsymbol{\omega}_{i0}$ 通常也是广义坐标 q 和时间 t 的函数。

根据第 9 章中伪速度的概念，由式(9.1.4)可知，系统的广义速度可以用 f 个独立的伪速度 $\dot{\pi}_\gamma$ 表示为

$$\dot{q}_j = \sum_{\gamma=1}^{f} h_{\gamma j}\dot{\pi}_\gamma + h_{0j} \qquad (j=1,2,\cdots,k) \tag{10.1.5}$$

将式(10.1.5)代入式(10.1.3)，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_i = \dot{\boldsymbol{r}}_i &= \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{u}_{ij}\Big(\sum_{\gamma=1}^{f} h_{\gamma j}\dot{\pi}_\gamma + h_{0j}\Big) + \boldsymbol{u}_{i0} \\ &= \sum_{\gamma=1}^{f}\Big(\sum_{j=1}^{k} h_{\gamma j}\boldsymbol{u}_{ij}\Big)\dot{\pi}_\gamma + \Big(\sum_{j=1}^{k} h_{0j}\boldsymbol{u}_{ij} + \boldsymbol{u}_{i0}\Big) \\ &= \sum_{\gamma=1}^{f} \boldsymbol{u}'_{i\gamma}\dot{\pi}_\gamma + \boldsymbol{u}'_{i0}\end{aligned} \tag{10.1.6}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{u}'_{i\gamma} &= \sum_{j=1}^{k} h_{\gamma j}\boldsymbol{u}_{ij} = \sum_{j=1}^{k} h_{\gamma j}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \\ \boldsymbol{u}'_{i0} &= \sum_{j=1}^{k} h_{0j}\boldsymbol{u}_{ij} + \boldsymbol{u}_{i0}\end{aligned}\right\} \tag{10.1.7}$$

式 (10.1.6) 中独立速度变量前的系数 $\boldsymbol{u}'_{i\gamma}$ 称为质点系中第 i 个质点相对于第 γ 个独立的速度变量 $\dot{\pi}_\gamma$ 的**偏速度**。由式(10.1.7)可以看出，$\boldsymbol{u}'_{i\gamma}$ 和 $\boldsymbol{u}'_{i0}$ 一般为广义坐标 q 和时间 t 的函数。

将式(10.1.5)代入式(10.1.4)，得

$$\boldsymbol{\omega}_i = \sum_{\gamma=1}^{f} \boldsymbol{\omega}'_{i\gamma}\dot{\pi}_\gamma + \boldsymbol{\omega}'_{i0} \tag{10.1.8}$$

式中 $\boldsymbol{\omega}'_{i\gamma}$ 和 $\boldsymbol{\omega}'_{i0}$ 通常也是广义坐标 q 和时间 t 的函数。同样称 $\boldsymbol{\omega}'_{i\gamma}$ 为刚体系中第 i 个刚体相对于第 γ 个独立速度变量 $\dot{\pi}_\gamma$ 的**偏角速度**。

对于完整系统，由于广义速度 $\dot{q}_j\,(j=1,2,\cdots,k)$ 彼此独立，因此可以取伪速度 $\dot{\pi}_\gamma$ 为广义速度，即 $\dot{\pi}_\gamma = \dot{q}_j\,(\gamma = j = 1,2,\cdots,k)$，则由式(10.1.2)可知，相对独立广义速度的偏速度

$$u'_{i\gamma} = u_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \tag{10.1.9}$$

需要指出，偏速度和偏角速度是关于广义坐标 q 和时间 t 的矢量函数，是相对于独立速度而言的，这里的独立速度可以是独立的广义速度 $\dot{q}_\gamma$，也可以是预先选定的独立的伪速度 $\dot{\pi}_\gamma$。由于独立速度变量的选取不是惟一的，因此，对于同一质点或刚体可以有不同形式的偏速度和偏角速度。但是对于质点系中每一个质点 M_i 和刚体系中每一个刚体 D_i，都分别有与系统自由度数相同数目的偏速度和偏角速度。因此，在讲偏速度和偏角速度时，必须指明是哪个质点或刚体相应于哪个独立速度的偏速度或偏角速度。

例 10－1 设一质点 A 在 Oxy 平面内沿固定的抛物线型轨道运动，轨道方程为

$$y = \frac{a}{2}x^2 \tag{a}$$

如图 10－1－1 所示，其中 a 为常数，求偏速度。

解：该系统为单自由度完整系统。质点 A 的速度投影($\dot{x}$ ，$\dot{y}$)应满足限制条件

$$\dot{y} = ax\dot{x} \tag{b}$$

所以($\dot{x}$ ，$\dot{y}$)中只有一个是独立的。现取定 y 为独立广义坐标，则 $\dot{y}$ 为独立广义速度。考虑到式(b)，可将质点 A 的速度表示为

$$\boldsymbol{v}_A = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} = \frac{1}{ax}\dot{y}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j}$$

或

$$\boldsymbol{v}_A = (\frac{1}{ax}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})\dot{y}$$

依照定义，上式中独立速度 $\dot{y}$ 的矢量系数就是质点 A 对于独立速度 $\dot{y}$ 的偏速度，以 $\boldsymbol{u}'_{Ay}$ 表示，即

$$\boldsymbol{u}'_{Ay} = \frac{1}{ax}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$$

读者可自行算出以 x 为独立坐标时的偏速度。

例 10－2 考察图 10－1－2 所示的双摆系统，试求偏速度。

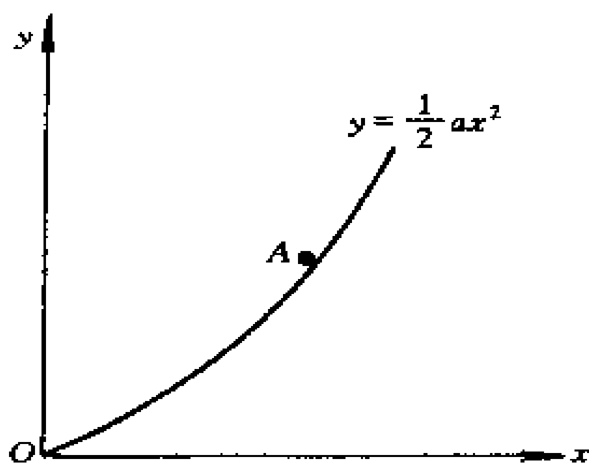


图 10－1－1

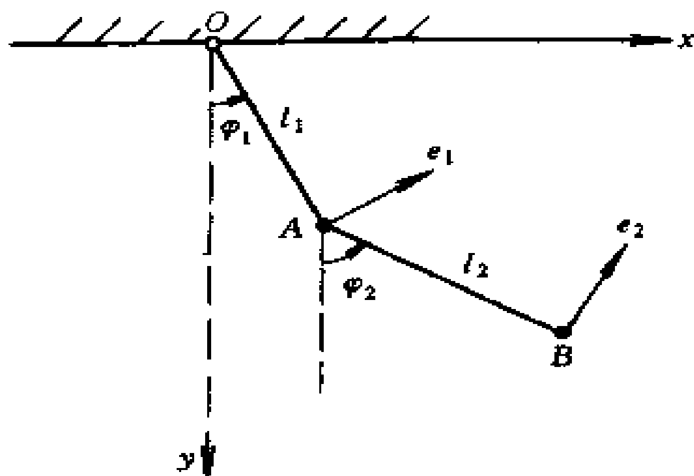


图 10－1－2

解：取 φ_1 和 φ_2 为独立广义坐标，则 $\dot{\varphi}_1$ 和 $\dot{\varphi}_2$ 均为独立速度。作单位矢量 e_1 和 e_2 分别垂直于 $\overline{OA}$ 和 $\overline{AB}$，如图示。则质点 A 和 B 的速度可分别表示为

$$\boldsymbol{v}_A = l_1\dot{\varphi}_1\boldsymbol{e}_1$$

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{AB} = l_1\dot{\varphi}_1\boldsymbol{e}_1 + l_2\dot{\varphi}_2\boldsymbol{e}_2$$

可见，质点 A 对于 $\dot{\varphi}_1$ 和 $\dot{\varphi}_2$ 的偏速度分别是

$$\boldsymbol{u}'_{A\varphi_1} = l_1\boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{u}'_{A\varphi_2} = 0$$

而质点 B 的两个偏速度分别是

$$\boldsymbol{u}'_{B\varphi_1} = l_1\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{u}'_{B\varphi_2} = l_2\boldsymbol{e}_2$$

考虑到 $\boldsymbol{e}_1 = \cos\varphi_1\boldsymbol{i} - \sin\varphi_1\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{e}_2 = \cos\varphi_2\boldsymbol{i} - \sin\varphi_2\boldsymbol{j}$，则可将 $\boldsymbol{v}_A$ 和 $\boldsymbol{v}_B$ 用 $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ 表示为

$$\boldsymbol{v}_A = l_1(\cos\varphi_1\boldsymbol{i} - \sin\varphi_1\boldsymbol{j})\dot{\varphi}_1$$

$$\boldsymbol{v}_B = l_1(\cos\varphi_1\boldsymbol{i} - \sin\varphi_1\boldsymbol{j})\dot{\varphi}_1 + l_2(\cos\varphi_2\boldsymbol{i} - \sin\varphi_2\boldsymbol{j})\dot{\varphi}_2$$

因而，点 A 和点 B 对于独立速度 $\dot{\varphi}_1$ 和 $\dot{\varphi}_2$ 的偏角速度成为

$$\boldsymbol{u}'_{A\varphi_1} = l_1(\cos\varphi_1\boldsymbol{i} - \sin\varphi_1\boldsymbol{j}), \quad \boldsymbol{u}'_{A\varphi_2} = 0$$

$$\boldsymbol{u}'_{B\varphi_1} = l_1(\cos\varphi_1\boldsymbol{i} - \sin\varphi_1\boldsymbol{j})$$

$$\boldsymbol{u}'_{B\varphi_2} = l_2(\cos\varphi_2\boldsymbol{i} - \sin\varphi_2\boldsymbol{j})$$

例 10－3 行星齿轮Ⅱ半径为 r，由连杆 OA 带动沿固定的大齿

轮Ⅰ滚动。轮Ⅰ的半径为 R，如图10－1－3所示。试求偏速度与偏角速度。

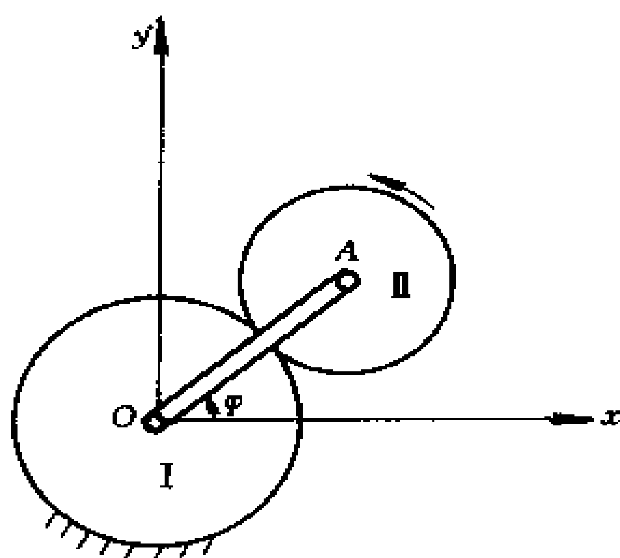


图 10－1－3

解：系统为单自由度完整系统。选连杆的转角 φ 为广义坐标，则点 A 的速度可写为

$$\boldsymbol{v}_A = -l\dot{\varphi}\sin\varphi\boldsymbol{i} + l\dot{\varphi}\cos\varphi\boldsymbol{j} = l(-\sin\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j})\dot{\varphi}$$

式中 $\dot{\varphi}$ 的矢量系数就是点 A 对于 $\dot{\varphi}$ 的偏速度，即

$$\boldsymbol{u}'_{A\varphi} = l(-\sin\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j})$$

其中 $l = R + r$。以 $\boldsymbol{\omega}_1$ 表示连杆 OA 的角速度，有

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\varphi}\boldsymbol{k}$$

式中 $\boldsymbol{k}$ 为沿 Oz 轴的单位矢，故连杆对于 $\dot{\varphi}$ 的偏角速度

$$\boldsymbol{\omega}'_{1\varphi} = \boldsymbol{k}$$

令行星齿轮Ⅱ的角速度为 $\dot{\psi}$，则

$$\dot{\psi} = \frac{R+r}{r}\dot{\varphi}$$

于是齿轮Ⅱ的角速度矢 $\boldsymbol{\omega}_2$ 可写为

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\psi}\boldsymbol{k} = \frac{R+r}{r}\dot{\varphi}\boldsymbol{k}$$

故齿轮Ⅱ对于 $\dot{\varphi}$ 的偏角速度

$$\boldsymbol{\omega}'_{2\varphi} = \frac{R+r}{r}\boldsymbol{k}$$

例 10－4 杆长为 $2l$ 的直杆 AB 作平面运动，假设其一端 A 的速度始终指向另一端 B，如图10－1－4所示。写出其中点 C 的偏速度。

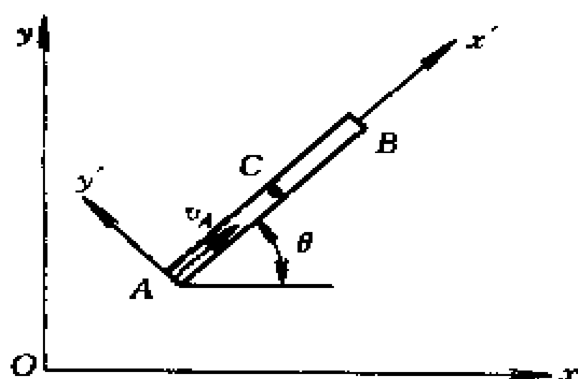


图 10－1－4

解：取 x_A、y_A 和 θ 为广义坐标，其约束方程为

$$\dot{y}_A = \dot{x}_A\tan\theta$$

是一非完整约束，故系统为两个自由度。C 点的速度

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_C &= \dot{x}_C\boldsymbol{i} + \dot{y}_C\boldsymbol{j} \\ &= (\dot{x}_A - l\dot{\theta}\sin\theta)\boldsymbol{i} + (\dot{y}_A + l\dot{\theta}\cos\theta)\boldsymbol{j} \\ &= (\dot{x}_A - l\dot{\theta}\sin\theta)\boldsymbol{i} + (\dot{x}_A\tan\theta + l\dot{\theta}\cos\theta)\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

若取

$$\dot{\pi}_1 = \dot{x}_A, \quad \dot{\pi}_2 = \dot{\theta}$$

则 C 点的偏速度

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}'_{Cx} &= \boldsymbol{i} + \tan\theta\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{u}'_{C\theta} &= -l\sin\theta\boldsymbol{i} + l\cos\theta\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

C 点的速度也可以写成

$$\boldsymbol{v}_C = v_A\boldsymbol{i}' + l\dot{\theta}\boldsymbol{j}'$$

注意到

$$v_A = \dot{x}_A\cos\theta + \dot{y}_A\sin\theta$$

可以取为伪速度，若取

$$\dot{\pi}_1 = v_A, \quad \dot{\pi}_2 = l\dot{\theta}$$

则有

$$\boldsymbol{u}'_{Cx} = \boldsymbol{i}', \quad \boldsymbol{u}'_{C\theta} = \boldsymbol{j}'$$

由此可见，伪速度的选择不是惟一的，偏速度将因伪速度的选择不同而有不同的形式。偏速度的形式越简单越好，这对下一节中的凯恩方程的计算是有利的。

10.2 凯恩方程

10.2.1 凯恩方程

从动力学普遍方程

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0 \tag{10.2.1}$$

出发导出凯恩方程。

设有 n 个质点组成的质点系，具有 f 个自由度。由上节可知，可以选取 f 个伪速度 $\dot{\pi}_\gamma(\gamma=1,2,\cdots,f)$，使系统中每一质点的速度用伪速度表示，即

$$\boldsymbol{v}_i=\sum_{\gamma=1}^{f}\boldsymbol{u}_{i\gamma}'\dot{\pi}_\gamma+\boldsymbol{u}_{i0}'\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{10.2.2}$$

由此得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i=\sum_{\gamma=1}^{f}\boldsymbol{u}_{i\gamma}'\dot{\pi}_\gamma\mathrm{d}t+\boldsymbol{u}_{i0}'\mathrm{d}t\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{10.2.3}$$

相对于伪速度 $\dot{\pi}_\gamma$，引入伪坐标 π_γ，则第 i 个质点的虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_i$ 可以用独立的伪坐标的变分来表示，即

$$\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{\gamma=1}^{f}\boldsymbol{u}_{i\gamma}\delta\pi_\gamma\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{10.2.4}$$

将上式代入动力学普遍方程，得

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\left(\sum_{\gamma=1}^{f}\boldsymbol{u}_{i\gamma}'\delta\pi_\gamma\right)=0\tag{10.2.5}$$

交换求和次序，得

$$\sum_{\gamma=1}^{f}\left[\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{u}_{i\gamma}'-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\boldsymbol{u}_{i\gamma}')\right]\delta\pi_\gamma=0\tag{10.2.6}$$

令

$$K_\gamma=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{u}_{i\gamma}',\qquad K_\gamma^*=\sum_{i=1}^{n}(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\boldsymbol{u}_{i\gamma}'$$

则式(10.2.6)可写成

$$\sum_{\gamma=1}^{f}(K_\gamma+K_\gamma^*)\delta\pi_\gamma=0\tag{10.2.7}$$

由于 $\delta\pi_\gamma$ 是彼此独立的，于是有

$$K_\gamma+K_\gamma^*=0\quad(\gamma=1,2,\cdots,f)\tag{10.2.8}$$

这就是**凯恩方程**。式中 K_γ 和 K_γ^* 分别称为系统对应于第 γ 个独立速度的**广义主动力**和**广义惯性力**。将这 f 个方程与 g 个非完整约束方程联立求解，则可得到 $f+g=k$ 个关于广义坐标 $q_j(t)$ 的方程组，求其解即可确定系统的运动规律。由此可见，利用凯恩方法建立系统的动力学方程，关键是计算系统的广义主动力和广义惯性力。

10.2.2 广义主动力和广义惯性力的计算

10.2.2.1 广义主动力

对于完整系统，如果取广义速度 $\dot{q}_j$ 为独立速度 $\dot{\pi}_\gamma(\gamma=j)$，由上节可知，偏速度 $\boldsymbol{u}'_{ij}=\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$，于是广义主动力

$$K_j=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}=Q_j\quad(j=1,2,\cdots,g)\qquad(10.2.9)$$

也就是说，广义主动力即为拉格朗日方程中系统对应于广义坐标的广义力。对照第二类拉格朗日方程，根据凯恩方程给出的结果，广义惯性力可由系统的动能表示，即

$$K_j^*=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)+\frac{\partial T}{\partial q}\quad(j=1,2,\cdots,f)\qquad(10.2.10)$$

因此，对于完整系统，凯恩方程与第二类拉格朗日方程是等价的。

对于一般的质点系，广义主动力可表述为：质点系中每一质点上作用的主动力与该点对应于某一独立速度的偏速度的标积之和，称为系统对应于该独立速度的广义主动力。以 K_γ 表示，即为

$$K_\gamma=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{u}'_{i\gamma}\quad(\gamma=1,2,\cdots,f)\qquad(10.2.11)$$

对于刚体，广义主动力可表述为：作用于刚体简化中心上的主矢和主矩，分别与该点对应于某一独立速度的偏速度与偏角速度的标积之和，称为刚体对应于该独立速度的广义主动力。假设 O 点为刚体的简化中心，则有

$$K_\gamma=\boldsymbol{R}_O\cdot\boldsymbol{u}'_{O\gamma}+\boldsymbol{M}_O\cdot\boldsymbol{\omega}'_\gamma\quad(\gamma=1,2,\cdots,f)\quad(10.2.12)$$

现在给出上式的证明。当刚体作一般运动时，其上任一质点 i 的速度

$$\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}_O+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_i\qquad(10.2.13)$$

式中 $\boldsymbol{v}_O$ 表示简化中心的速度，$\boldsymbol{\omega}$ 表示刚体的角速度，$\boldsymbol{r}'_i$ 表示质点 i 相对简化中心 O 点的矢径。$\boldsymbol{v}_O$、$\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{r}_i$ 可用伪速度表示，即

$$v_O=\sum_{\gamma=1}^{f} u'_{O\gamma}\dot{\pi}_\gamma+u'_{O0},\quad v_i=\sum_{\gamma=1}^{f} u'_{i\gamma}\dot{\pi}_\gamma+u'_{i0},\quad \omega=\sum_{\gamma=1}^{f} \omega'_\gamma\dot{\pi}_\gamma+\omega'_0 \tag{10.2.14}$$

将以上各式代入式(10.2.13)，比较等式两边 $\dot{\pi}_\gamma$ 前面的系数，可得

$$u'_{i\gamma}=u'_{O\gamma}+\omega'_\gamma\times r'_i \quad (\gamma=1,2,\cdots,f) \tag{10.2.15}$$

上式表明，刚体上第 i 个质点相对第 γ 个独立速度的偏速度，可用刚体简化中心 O 点和刚体相对第 γ 个独立速度的偏速度和偏角速度表示。将上式代入广义主动力的表达式（10.2.11）中，则有

$$K_\gamma=\sum_{i=1}^{n} F_i\cdot(u'_{O\gamma}+\omega'_\gamma\times r'_i)=\sum_{i=1}^{n} F_i\cdot u_{O\gamma}+\sum_{i=1}^{n} F_i\cdot\omega'_\gamma\times r'_i$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right)\cdot u'_{O\gamma}+\left(\sum_{i=1}^{n} r'_i\times F_i\right)\cdot\omega'_\gamma$$

注意到主矢和主矩的表示式，则广义主动力可以表示为

$$K_\gamma=R_O\cdot u'_{O\gamma}+M_O\cdot\omega'_\gamma \quad (\gamma=1,\ 2,\ \cdots,\ f) \tag{10.2.16}$$

式中 R_O 和 M_O 分别为作用于刚体上的所有主动力向简化中心 O 点简化得到的主矢和主矩。这个表达式简化了对于广义主动力的计算，若系统由 N 个刚体组成，可将同一刚体上所有主动力向简化中心 O 点简化，得到作用于 O 点的主矢和主矩，再计算出简化中心 O 点及该刚体对应于某一独立速度变量的偏速度和偏角速度，根据上式可得某一刚体对应于某一独立速度变量的广义主动力。然后将所有刚体上的广义力求和，则可得到整个系统相对于某一独立速度的广义主动力，即

$$K_\gamma=\sum_{i=1}^{N} R_{O_i}\cdot u'_{O_i\gamma}+\sum_{i=1}^{N} M_{O_i}\cdot\omega'_{i\gamma} \quad (\gamma=1,2,\cdots,f) \tag{10.2.17}$$

式中角标 O_i 表示第 i 个刚体上的简化中心。

10.2.2.2　广义惯性力

对于质点系，可由下式计算出

$$K^*_\gamma=\sum_{i=1}^{n}(-m_i\ddot{r}_i)\cdot u'_{i\gamma} \quad (\gamma=1,2,\cdots,f) \tag{10.2.18}$$

上式括号中的项表示作用在每一质点上的惯性力。因此，在计算惯性力时，需对各点的加速度进行分析，然后在每个质点上加上惯性力，

算出每一质点上作用的惯性力与该点对应于某一独立速度的偏速度的标积之和，即为系统对应于该独立速度的广义惯性力。

对于刚体，与广义主动力的推导方法相同，将式(10.2.15)代入式(10.2.18)，得

$$K_{\gamma}^{*} = \sum_{i=1}^{n} (-m_i \boldsymbol{a}_i) \cdot \boldsymbol{u}'_{i\gamma}$$

$$= -\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{a}_i \right) \cdot \boldsymbol{u}'_{O\gamma} - \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{a}_i) \cdot \boldsymbol{\omega}'_{\gamma} \qquad (10.2.19)$$

若将简化中心选在刚体的质心 C 上，则

$$\boldsymbol{u}'_{O\gamma} = \boldsymbol{u}'_{C\gamma}, \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{a}_i = M \boldsymbol{a}_C$$

式中 M 为刚体的质量，$\boldsymbol{a}_C$ 为质心的加速度。若取质心 C 为平动坐标系的原点，则有

$$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{a}'_i$$

$\boldsymbol{a}'_i$ 表示刚体上第 i 个质点相对平动坐标系的加速度，并注意到 $\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}'_i = 0$，于是式(10.2.19)中的第二项可写成

$$\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{a}_i) \cdot \boldsymbol{\omega}'_{\gamma} = \sum_{i=1}^{n} [\boldsymbol{r}'_i \times m_i (\boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{a}'_i)] \boldsymbol{\omega}'_{\gamma}$$

$$= \left[\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{a}_C \right) + \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{a}'_i) \right] \cdot \boldsymbol{\omega}'_{\gamma}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{a}'_i) \cdot \boldsymbol{\omega}'_{\gamma}$$

以 $\boldsymbol{R}_C^{*}$ 表示$(-M\boldsymbol{a}_C)$，以 $\boldsymbol{L}_C^{*}$ 表示$[-\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{a}'_i)]$，则上式可简写为

$$K_{\gamma}^{*} = \boldsymbol{R}_C^{*} \cdot \boldsymbol{u}'_{C\gamma} + \boldsymbol{L}_C^{*} \cdot \boldsymbol{\omega}'_{\gamma} \qquad (\gamma = 1, 2, \cdots, f) \quad (10.2.20)$$

同理可得整个刚体系统的广义惯性力

$$K_{\gamma}^{*} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{R}_{C_i}^{*} \boldsymbol{u}'_{C_i\gamma} + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{L}_{C_i}^{*} \cdot \boldsymbol{\omega}'_{i\gamma} \quad (\gamma = 1, 2, \cdots, f) \qquad (10.2.21)$$

式中角标 C_i 表示第 i 个刚体的质心。

由此可见，广义主动力和广义惯性力具有相同的结构，且形式简

单，便于理解和计算。

例 10－5 质量为 m，半径为 r 的均质半圆盘，在粗糙的水平面上摆动，设 $\overline{O'C}=e$，C 为半圆盘的质心，如图 10－2－1 所示。试用凯恩方程求其摆动的微分方程。

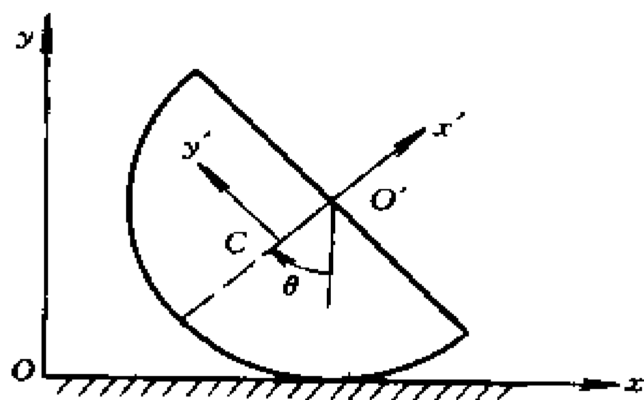


图 10－2－1

解：系统具有一个自由度，取 θ 为广义坐标，并令 $\dot{\pi}=\dot{\theta}$。用 $\boldsymbol{i}'$、$\boldsymbol{j}'$表示沿动坐标系 $O'x'y'$的单位矢量，则质心 C 点的速度

$$\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{v}_O+\boldsymbol{v}_{O'C}=r\dot{\theta}\boldsymbol{i}+e\dot{\theta}\boldsymbol{j}'$$

$$=(r\boldsymbol{i}+e\boldsymbol{j}')\dot{\theta}$$

于是 C 点对应于 $\dot{\theta}$ 的偏速度

$$\boldsymbol{u}'_{C\theta}=r\boldsymbol{i}+e\boldsymbol{j}'$$

半圆盘转动的角速度

$$\boldsymbol{\omega}=-\dot{\theta}\boldsymbol{k}$$

于是半圆盘对应于 $\dot{\theta}$ 的偏角速度

$$\boldsymbol{\omega}'_{\theta}=-\boldsymbol{k}$$

在半圆盘上主动力只有其重力 $\boldsymbol{P}$ 作用，即

$$\boldsymbol{P}=-mg\boldsymbol{j}$$

于是，系统的广义主动力

$$K=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{u}'_{C\theta}=-mg\boldsymbol{j}\cdot(r\boldsymbol{i}+e\boldsymbol{j}')=-mge\sin\theta$$

C 点的加速度

$$\boldsymbol{a}_C=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\boldsymbol{i}+e\boldsymbol{j}')\dot{\theta}=r\theta\boldsymbol{i}+e\theta\boldsymbol{j}'+e\dot{\theta}\ (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{j}')$$

$$=r\theta\boldsymbol{i}+e\theta\boldsymbol{j}'+e\dot{\theta}^2\boldsymbol{i}'$$

则半圆盘上各点惯性力的主矢

$$\boldsymbol{R}_C=-m\boldsymbol{a}_C=-m(r\theta\boldsymbol{i}+e\theta\boldsymbol{j}'+e\dot{\theta}^2\boldsymbol{i}')$$

而半圆盘上各点惯性力对 C 点的主矩

$$L_C = -J_C\epsilon = -J_C(-\theta\,\boldsymbol{k}) = J_C\theta\,\boldsymbol{k}$$

于是，系统的广义惯性力

$$K^* = \boldsymbol{R}_C \cdot \boldsymbol{u}'_{C\theta} + \boldsymbol{L}_C \cdot \boldsymbol{\omega}'_\theta = -m\boldsymbol{a}_C \cdot \boldsymbol{u}'_{C\theta} + J_C\theta\,\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\omega}'_\theta$$

$$= -m(r\theta\,\boldsymbol{i} + e\theta\,\boldsymbol{j}' + e\theta^2\boldsymbol{i}')(r\boldsymbol{i} + e\boldsymbol{j}') + J_C\theta\,\boldsymbol{k}\cdot(-\boldsymbol{k})$$

$$= -m(r^2\theta + e^2\theta - 2re\theta\cos\theta + re\dot{\theta}^2\sin\theta) - J_C\theta$$

由凯恩方程

$$K + K^* = 0$$

得

$$-mge\sin\theta - m(r^2\theta + e^2\theta + 2re\theta\cos\theta + re\dot{\theta}^2\sin\theta) - J_C\theta = 0$$

化简后为

$$(\rho_C^2 + r^2 + e^2 - 2re\cos\theta)\theta + re\dot{\theta}^2\sin\theta + ge\sin\theta = 0$$

式中 ρ_C 为半圆盘对于其质心 C 的回转半径。上式即为半圆盘在平面上摆动的微分方程。

例 10－6 重量为 P 的滑块可在光滑的固定水平面上滑动。半径为 a、重量为 Q 的匀质圆柱同时在滑块的斜面上滚动，如图 10－2－2 所示。已知斜面倾角为 α，试写出在重力作用下系统的运动方程。

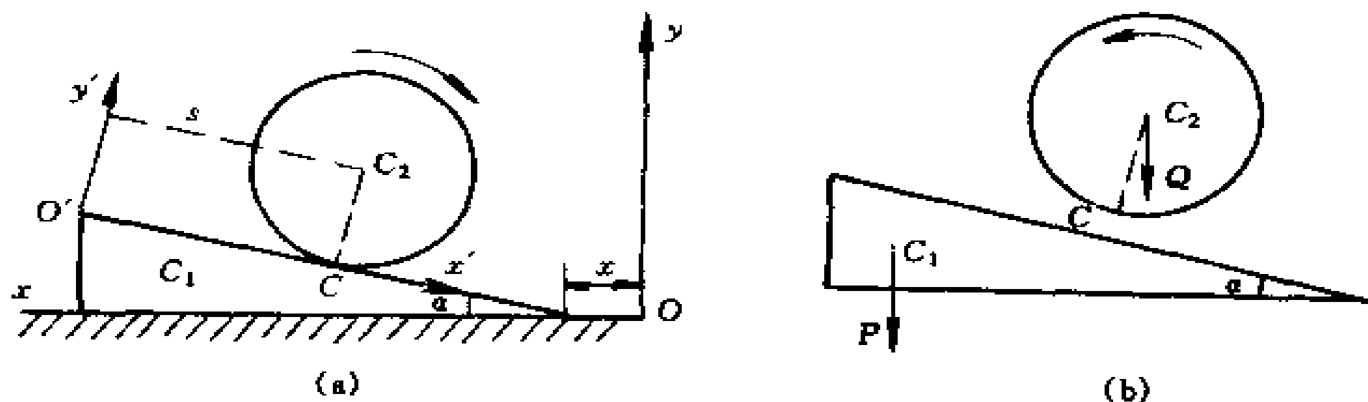


图 10－2－2

解： 系统是两自由度完整系统。选取 x、s 为独立的广义坐标，则 $\dot{x}$、$\dot{s}$ 为独立的广义速度。图中平动坐标系 $x'O'y'$ 与滑块固连，C_1 与 C_2 分别是滑块和圆柱的质心，C 点为两个刚体的接触点。

C_1 点的速度可表示为

$$\boldsymbol{v}_{C_1}=\dot{x}\boldsymbol{i}$$

故 C_1 点对于两个独立速度的偏速度分别是

$$\boldsymbol{u}'_{C_1x}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{u}'_{C_1s}=0$$

C_2 点的速度是

$$\boldsymbol{v}_{C_2}=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{s}\boldsymbol{i}'$$

故 C_2 点的两个偏速度分别是

$$\boldsymbol{u}_{C_2x}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{u}_{C_2s}=\boldsymbol{i}'$$

这里 $\boldsymbol{i}'$是沿 $O'x'$的单位矢。

滑块作平动，其角速度 $\boldsymbol{\omega}_1=0$，故滑块的偏角速度也恒等于零。圆柱的角速度

$$\boldsymbol{\omega}_2=-\frac{\dot{s}}{a}\boldsymbol{k}'$$

故圆柱的两个偏角速度是

$$\boldsymbol{\omega}_{2x}=0,\quad \boldsymbol{\omega}_{2s}=-\frac{\boldsymbol{k}'}{a}$$

现在来计算广义主动力。在滑块和圆柱上分别有重力 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 的作用。按照式(10.2.17)，系统对独立速度 $\dot{x}$ 的广义主动力是

$$K_x=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{u}_{C_1x}+\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{u}_{C_2x}$$

考虑到 $\boldsymbol{P}=-P\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{Q}=-Q\boldsymbol{j}$，上式可简化为

$$K_x=-P\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}-Q\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=0$$

同理可算出系统对于独立速度 $\dot{s}$ 的广义主动力是 $K_s=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{u}_{C_1s}+\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{u}_{C_2s}$，代入相应的表示式，得

$$K_s=-Q\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}'=Q\sin\alpha$$

在计算广义惯性力以前，可先将各刚体的惯性力系向各自的质心简化。对于滑块，其惯性力系简化为在 C_1 点的一个主矢 $\boldsymbol{R}^*_{C_1}$，且

$$\boldsymbol{R}^*_{C_2}=-\frac{P}{g}\ddot{x}\boldsymbol{i}$$

对于圆柱，其惯性力系简化为在 C_2 点的一个主矢

$$\boldsymbol{R}_{C_2}^{*} = -\frac{Q}{g}\left(x\,\boldsymbol{i} + s\,\boldsymbol{i}' \right)$$

和一个惯性力偶，其矩矢

$$\boldsymbol{L}_{C_2}^{*} = J_C \frac{s}{a}\boldsymbol{k}' = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}a^2 \cdot \frac{s}{a}\boldsymbol{k}' = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}as\,\boldsymbol{k}'$$

于是，根据式(10.2.18)，系统对于独立速度 $\dot{x}$ 的广义惯性力

$$K_x^{*} = \boldsymbol{R}_{C_1}^{*}\cdot\boldsymbol{u}'_{C_1x} + \boldsymbol{R}_{C_2}^{*}\cdot\boldsymbol{u}'_{C_2x} + \boldsymbol{L}_{C_2}^{*}\cdot\boldsymbol{\omega}'_{C_2x}$$

将相应的表示式代入，得

$$\begin{aligned} K_x^{*} &= -\frac{P}{g}x\,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} - \frac{Q}{g}x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} - \frac{Q}{g}s\boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{i} \\ &= -\left(\frac{P}{g} + \frac{Q}{g}\right)x + \frac{Q}{g}s\cos\alpha \end{aligned}$$

系统对于独立速度 $\dot{s}$ 的广义惯性力

$$\begin{aligned} K_s^{*} &= \boldsymbol{R}_{C_1}^{*}\cdot\boldsymbol{u}'_{C_1s} + \boldsymbol{R}_{C_2}^{*}\cdot\boldsymbol{u}'_{C_2s} + \boldsymbol{L}_{C_2}^{*}\cdot\boldsymbol{\omega}'_{C_2s} \\ &= \frac{Q}{g}\left(x\cos\alpha - \frac{3}{2}s\right) \end{aligned}$$

将对应的广义主动力和广义惯性力代入凯恩方程（10.2.8)，得到系统的运动方程为

$$\left(\frac{P}{g} + \frac{Q}{g}\right)x - \frac{Q}{g}s\cos\alpha = 0 \tag{a}$$

$$\frac{Q}{g}x\cos\alpha - \frac{3}{2}\frac{Q}{g}s + Q\sin\alpha = 0$$

或

$$(P + Q)x - Qs\cos\alpha = 0 \tag{b}$$

$$2x\cos\alpha - 3\dot{s} + 2g\sin\alpha = 0$$

由此可以解出

$$x = \frac{Q\sin 2\alpha}{3P + Q + 2Q\sin^2\alpha}g$$

$$s = \frac{2\,(P + Q)\,\sin\alpha}{3P + Q + 2Q\sin^2\alpha}g$$

可见，在重力作用下，滑块作匀加速滑动，而圆柱在斜面上作匀加速相对滚动。

顺便指出，方程(a)经一次积分后可得

$$\frac{P}{g}\dot{x}+\frac{Q}{g}(\dot{x}-\dot{s}\cos\alpha)=\text{常数}$$

上式表明了系统动量在水平方向的投影是常量，亦即在水平方向系统的动量守恒。这是一个明显的物理事实，因为系统在水平方向不受外力作用。可见，第一个运动方程(a)或方程(b)可以直接应用动量定理而得到。反之，也可以说，凯恩方程包含了这一动力学普遍定理。

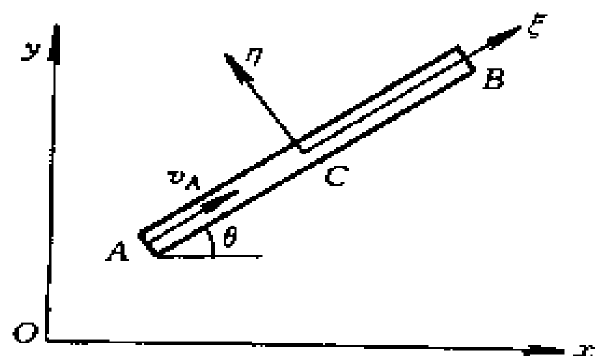


图 10-2-3

例 10-7 长为 $2l$、质量为 m 的均质杆 AB 在水平面上运动。A 端的速度始终沿着 AB 杆方向。试用凯恩方程建立杆 AB 的运动微分方程。

解：这是二个自由度的非完整系统。取 $\dot{\pi}_1=v_A$，$\dot{\pi}_2=l\dot{\theta}$，沿 $C\xi\eta$ 系的单位矢量为 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 垂直纸面朝上。

$$\boldsymbol{v}_C=v_A\boldsymbol{e}_1+l\theta\,\boldsymbol{e}_2=\dot{\pi}_1\boldsymbol{e}_1+\dot{\pi}_2\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{\omega}=\theta\,\boldsymbol{e}_3=\frac{\dot{\pi}_2}{l}\boldsymbol{e}_3$$

由此得到偏速度和偏角速度为

$$\boldsymbol{u}'_{C\pi_1}=\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{u}'_{C\pi_2}=\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{\omega}'_{\pi_1}=0,\ \boldsymbol{\omega}'_{\pi_2}=\frac{\boldsymbol{e}_3}{l}$$

质心加速度和杆的角加速度为

$$\boldsymbol{a}_C=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t}=\pi_1\boldsymbol{e}_1+\dot{\pi}_1\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_1+\pi_2\boldsymbol{e}_2+\dot{\pi}_2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_2$$

$$=\left(\pi_1-\frac{\dot{\pi}_2^2}{l}\right)\boldsymbol{e}_1+\left(\pi_2+\frac{\dot{\pi}_1\dot{\pi}_2}{l}\right)\boldsymbol{e}_2$$

$$\varepsilon = \frac{\dot{\pi}_2}{l} e_3$$

系统只受重力作用，垂直于 $u'_{C\pi_1}$、$u'_{C\pi_2}$，而主矩 L_C 为零，因而，广义主动力

$$K_{\pi_1} = 0, \quad K_{\pi_2} = 0$$

由式(10.2.19)知，广义惯性力

$$K^*_{\pi_1} = -m\left(\pi_1 - \frac{\dot{\pi}_2^2}{l}\right) e_1 \cdot e_1 = -m\left(\dot{\pi}_1 - \frac{\dot{\pi}_2^2}{l}\right)$$

$$K^*_{\pi_2} = -m\left(\pi_2 + \frac{\dot{\pi}_1 \dot{\pi}_2}{l} e_2 \cdot e_2 - J_C \frac{\dot{\pi}_2}{l^2} e_3 \cdot e_3\right.$$

$$= -\frac{1}{l^2}\left[(J_C + ml^2)\pi_2 + ml\dot{\pi}_1 \dot{\pi}_2\right]$$

$$= -\frac{1}{l^2}(J_A \pi_2 + ml\dot{\pi}_1 \dot{\pi}_2)$$

由式（10.2.8）知，凯恩方程为

$$\pi_1 - \frac{\dot{\pi}_2^2}{l} = 0$$

$$J_A \pi_2 + ml\dot{\pi}_1 \dot{\pi}_2 = 0$$

这是凯恩形式的运动微分方程。

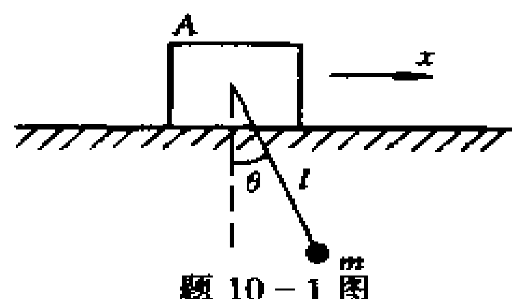
若将 $\dot{\pi}_1 = v_A$，$\pi_1 = \dot{v}_A$，$\dot{\pi}_2 = l\dot{\theta}$，$\pi_2 = l\ddot{\theta}$代入上式，得

$$\dot{v}_A - l\dot{\theta}^2 = 0$$

$$J_A \ddot{\theta} + mlv_A\theta = 0$$

习　　题

10-1　滑块 A 质量为 M，在固定的光滑水平面上滑动。在滑块中心悬挂长为 l、质量为 m 的单摆，从而构成椭圆摆，如题 10-1 图所示，试写出系统的凯恩方程。

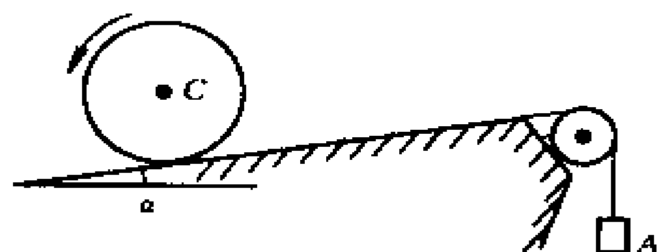


题 10-1 图

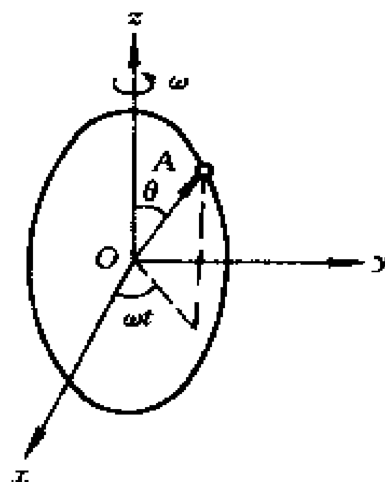
10-2　匀质圆柱重为 P，半径为 r，柱上绕有细绳，绳的一端跨

过小滑轮后悬挂一重物 A，重量为 Q。圆柱被放在倾角为 α 的光滑斜面上。如题10－2图所示。(1) 试写出系统的凯恩方程。(2) 求重物 A 下降的加速度。小滑轮质量及绳重不计。

10－3 一细管弯成半径为 a 的圆环形，以匀角速度 ω 绕固定的铅直轴转动。质量为 m 的质点可以在细管内无摩擦地滑动，如题10－3图所示。试用凯恩方程写出的系统运动微分方程。



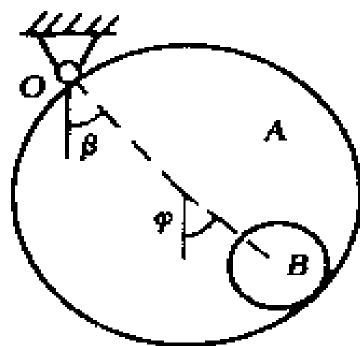
题 10－2 图



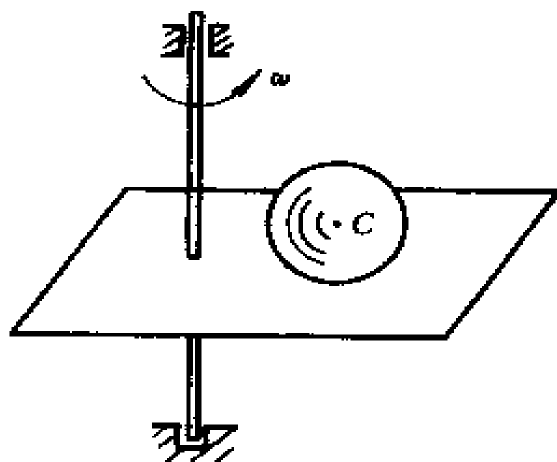
题 10－3 图

10－4 圆盘 B 在绕水平轴 O 转动的圆环 A 内作纯滚动，A 的半径为 R，B 的半径为 r，$R=4r$。A 和 B 的质量相同均为 m，如题10－4图所示。试用凯恩方程求系统的运动微分方程。

10－5 一均质圆球放到一绕铅垂轴以匀角速度 ω 转动的粗糙水平面上，如题10－5图所示。假设当圆球放上去时，接触点间没有相



题 10－4 图



题 10－5 图

对滑动。证明此后圆球中心 C 点的轨迹为一圆且 C 点在此圆上作匀速运动。该系统为一非定常、非完整系，试分别用刚体动力学方程、阿沛尔方程和凯恩方程求解。

习 题 答 案

第 1 章　分析力学的基本概念

1－1　$x\cos[\frac{1}{r}(l-\sqrt{x^2+y^2-r^2})-\theta]$

$-y\sin[\frac{1}{r}(l-\sqrt{x^2+y^2-r^2})-\theta]=r$；

$x=r\cos(\alpha-\theta)-(l-r\alpha)\sin(\alpha-\theta)$，

$y=-r\sin(\alpha-\theta)-(l-r\alpha)\cos(\alpha-\theta)$

1－2　$x_1=r\sin\theta\cos\varphi$，$y_1=r\sin\theta\sin\varphi$，$z_1=r\cos\varphi$；

$x_2=y_2=0$，$z_2=r(1+\theta)-l$

1－3　$(x_A-r\cos\omega t)^2+(y_A-r\sin\omega t)^2=r^2$；　$f=1$

1－4　$l_1\sin\varphi_1+l_2\sin\varphi_2-l_3\sin\varphi_3-l_4\sin\varphi_4=0$，

$l_1\cos\varphi_1+l_2\cos\varphi_2+l_3\cos\varphi_3+l_4\cos\varphi_4=L$；　$f=8$

1－5　$(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2=l^2$，

$(x_B-x_A)(\dot{y}_A+\dot{y}_B)-(y_B-y_A)(\dot{x}_A+\dot{x}_B)=0$；　$f=2$

1－6　$x_1^2+y_1^2=l^2,(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=l^2$，

$(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2=l^2,x_3^2+y_3^2=l^2$；　$f=2$

1－7　$y_1-x_1\tan(\omega t)+(x_{P0}+v_{0x}t+0.5a_{0x}t^2)$

$-(y_{P0}+v_{0y}t+0.5a_{0y}t^2)=0$；　$f=1$

1－8　(1)、(2)、(3) 是不可积的，

(4)是可积的，积分因子 $\mu=e^x$，$e^x(x^2+y^2+z^2)=C$(常数)；

(5)是可积的，积分因子 $\mu=1$，$(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2$

$=C$（常数）

第 2 章　虚位移原理和达朗伯原理

2－1　$\varphi=\arctan\{\frac{1}{(P-Q)\sin\theta}[2r\rho\sin\theta+(P+Q)\cos\theta]\}$

2－2　$M_2=M_1\frac{\sin\theta_2\sin\theta_4}{\sin\theta_1\sin\theta_3}$

2－3　$\Delta\omega_{BC}=\Delta\omega_{OA}\cot^2\alpha$；　$\Delta\omega_{O_1B}=\Delta\omega_{OA}(1-\cot^2\alpha)/2$

2－4　$M_2=0.5M_1$；　$M_3=M_1$

2－5　$\theta=2\arcsin(1-\frac{3W}{4ak})$

2－6　$k=W/2l$

2－7　$N_A=\frac{M}{\sqrt{a^2+b^2}}$，　$N_B=\frac{M_a}{a^2+b^2}$，　$N_C=\frac{M_b}{a^2+b^2}$

2－8　$S_{CD}=\sqrt{2}(P_2-P_1)/4$　（受拉）；

$S_{CE}=-0.5(P_1+P_2)$　（受压）

2－9　$\theta_1=61.226°$，　$\theta_2=66.807°$

2－10　当 $\gamma=2P/kl<1$ 时，$\varphi=0$，为稳定平衡，$\varphi=\arccos\gamma$，为不稳定平衡；当 $\gamma\geqslant1$ 时，$\varphi=0$，为不稳定平衡

2－11　$\varphi=0$，为不稳定平衡；$\varphi=\pi$ 时，若 $1>\gamma\geqslant\frac{2}{3}$，为稳定平衡，若 $\gamma<\frac{2}{3}$，为不稳定平衡；$\varphi=\arccos\{\frac{1}{4}[5-(1-\lambda)^{-2}]\}$，且 $\gamma\leqslant\frac{2}{3}$时，为稳定平衡

2－12　系统平衡时，(1) θ 角有四个理论值：$\theta=0$，π，$\frac{1}{2}\pi$ 和 $\frac{2}{3}\pi$，其中只有 $\theta=0$ 才是合理的(单面约束的缘故)；(2) 只有当 $l\geqslant2r$ 时，系统的平衡是稳定的，对应的位置为 $\varphi=\frac{1}{2}\arcsin(\frac{2r}{l})$

2－13　略

2－14　略

第3章　动力学方程的三种基本形式

3－1　$a_M=9\sqrt{3}g/16$

3－2　$a_M=27g/29$

3－3　$a_P=0.377\ \mathrm{m/s^2}$；$T_{FD}=10.38\ \mathrm{kN}$

3－4　$\omega^2=\frac{P\tan\alpha+kl\sin\alpha}{P(b+l\sin\alpha)}g$

3－5　(1) $\varepsilon=\frac{1}{2r}(g\sin\alpha-a\cos\alpha)$；　(2) $f\geqslant\frac{g\sin\alpha-a\cos\alpha}{2(g\cos\alpha+a\sin\alpha)}$；

(3) $a>g\tan\alpha$

3－6　$\varepsilon_{AB}=-3.81\ \mathrm{rad/s^2}$；　$\varepsilon_C=19.33\ \mathrm{rad/s^2}$

3－7　$X_D=6.96\ \mathrm{N}$，$Y_D=31.2\ \mathrm{N}$

3－8　$a_A=\frac{1}{11}g$（向上），　$a_B=\frac{3}{11}g$（向下），　$a_C=\frac{1}{11}g$（向上）

3－9　$\omega_{AB}=\omega_{CD}=\frac{3S}{5ml}$

3－10　$S_C=\frac{1}{11}S$（向左）

3－11　（1）$\omega=\frac{18v}{7l}$，$v_C=\frac{1}{7}v$；　（2）$S=\frac{6}{7}mv$；

（3）$\Delta T=-\frac{3}{14}mv^2$

第4章　高斯最小拘束原理

4－1　略

4－2　$a=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g$

4－3　$\frac{3}{2}(R-r)\ddot{\theta}+g\sin\theta=0, a_\tau=-\frac{2}{3}g\sin\theta$

第5章　哈密顿原理

5－1　略

5－2　$\int_{t_0}^{t_1}\{m\dot{x}\delta\dot{x}-[kx+c\dot{x}-F(t)]\delta x\}\mathrm{d}t=0$

5－3　$(1-\cos\theta)\ddot{\theta}+\frac{\dot{\theta}^2}{2}\sin\theta-\frac{g}{2a}\sin\theta=0$

5－4　$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx+ma=0$

5－5　$\begin{cases}\frac{1}{2}m(R-r)\varphi-(M+\frac{1}{2}m)R\ddot{\theta}=0\\ \frac{1}{2}R\ddot{\theta}-\frac{3}{2}(R-r)\ddot{\varphi}-g\sin\varphi=0\end{cases}$

5－6　$x+\frac{c}{m_1+m_2}x=0$，　$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0$

5－7　$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})=0$

第6章　拉格朗日第二类方程

6－1　$T=\frac{m}{4}[3\dot{s}^2-6r\omega\dot{s}+(2s^2+3r^2)\omega^2]$

6－2 $T=\frac{1}{2}(J_0+\frac{2}{5}mR^2)\theta^2+\frac{1}{2}(\frac{7}{5}m)(R-r)^2\varphi^2-\frac{2}{5}m(R-r)R\dot{\varphi}\theta$

6－3 $mx'+(k-m\omega^2/4)x'=0$

6－4 $L=\frac{3}{4}m\dot{x}[\frac{(1+a^2x^2)^{\frac{3}{2}}-aR}{1+a^2x^2}]^2-\frac{1}{2}mga[x^2+\frac{2R}{a}(1+a^2x^2)^{-\frac{1}{2}}]$

6－5 $(l_0-vt)\varphi-2v\dot{\varphi}+g\sin\varphi=0$

6－6 $(\frac{m_1}{3}+\frac{3m_2}{2})(R-r)^2\varphi+(\frac{m_1}{2}+m_2)(R-r)\cos\varphi=M$

6－7 $[J_3+r^2(m_1+m_2)\sin^2\varphi+\frac{J_2r^2\cos^2\varphi}{l^2}]\varphi$

$+[r^2(m_1+m_2)-\frac{J_2r^2}{l^2}]\varphi^2\sin\varphi\cos\varphi=psr\sin\varphi-M$

6－8 $4mr\varphi-mr^2\omega^2\sin4\varphi-2r\sin2\varphi(mg+kr)+krl_0\sin\varphi=0$

6－9 $(M+m)x-Ml(\varphi\sin\varphi+\varphi^2\cos\varphi)-(M+m)g+k(x-l_0)=0$

$4l\varphi+3g\sin\varphi-3x\sin\varphi=0$

6－10 $(m_1+m_2)x+m_2\xi\cos\alpha+k_1x=H\sin\omega t$

$m_2\cos\alpha x+\frac{3}{2}m_2\xi+k_2\xi=0$

6－11 $(M+m)\xi+m(R-r)(\varphi\cos\varphi-\dot{\varphi}^2\sin\varphi)+k\xi=0$

$3(R-r)\varphi+2\xi\cos\varphi+g\sin\varphi=0$（式中 ξ 是弹簧变形）

6－12 $(\frac{3}{2}M+m)x-ml\ddot{\theta}\cos(\theta-\alpha)+ml\theta^2\sin(\theta-\alpha)-(M+m)g\sin\alpha=0$

$l\ddot{\theta}-x\cos(\theta-\alpha)+g\sin\theta=0$

6－13 $(4M+3m)R\ddot{\theta}+m(R-r)[2\cos(\varphi-\theta)-1]\varphi$

$-2m(R-r)\sin(\varphi-\theta)\dot{\varphi}^2+2(M+m)g\sin\theta=0$

$3(R-r)\varphi+R[2\cos(\varphi-\theta)-1]\ddot{\theta}+2R\theta^2\sin(\varphi-\theta)+2g\sin\varphi=0$

6－14 $\begin{cases}(2m+3m_1)x+ml\cos\varphi\varphi-ml\sin\varphi\varphi^2+2k(x-l_0)=0\\2l\varphi+3x\cos\varphi+3g\sin\varphi=0\end{cases}$

$E=T+V=\frac{1}{2}(m+\frac{3}{2}m_1)\dot{x}^2+\frac{ml^2}{6}\varphi^2+\frac{ml\cos\varphi}{2}\dot{x}\dot{\varphi}+\frac{k}{2}(x-l_0)^2$

$-mg\frac{l}{2}\cos\varphi=h$（常量）

6－15 $\frac{d}{dt}[(J+my^2)\varphi]=M(\varphi)$

$(y^2+a^2)y+yy^2+ya(g-a\dot{\varphi}^2)=0$

$$\frac{1}{2}(J+my^2)\varphi^2+\frac{1}{2}m(1+\frac{y^2}{a^2})y^2+\frac{mgy^2}{2a}-\int_0^{\varphi}M(\varphi)\mathrm{d}\varphi=h(\text{常量})$$

6－16 $(m_1+m_2)x-m_2(R+r)\varphi\cos\varphi=$ 常量

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)x^2+\frac{1}{2}m_2[\frac{3}{2}(R+r)^2\dot{\varphi}^2-2(R+r)\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi]$$

$$-m_2g(R+r)\cos\varphi=\text{常量}$$

6－17 $3R\varphi-(R+r)\ddot{\theta}=0$

$$11(R+r)\theta-3R\varphi+9g\sin\theta=0$$

$$3R\varphi-(R+r)\theta=\text{常量}$$

$$\frac{3}{4}mR^2\varphi^2+\frac{11}{12}m(R+r)^2\theta^2-\frac{1}{2}mR(R+r)=0$$

$$\theta\varphi-\frac{3}{2}mg(R+r)\cos\theta=\text{常量}$$

6－18 $R=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\dot{\varphi}-L=\frac{C_\varphi^2}{m_0r^2\sin^2\theta}+m_0C^2\sqrt{(1-\frac{\dot{r}^2+r^2\theta^2}{C^2})(1+\frac{C_\varphi^2}{m_0^2C^2r^2\sin^2\theta})^{-1}}$

6－19 $R=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\dot{\varphi}-L=\frac{C_\varphi^2}{2[J+m(a+r\sin\varphi)^2]}-\frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2-mgr\cos\varphi$

6－20 $\ddot{\theta}-\frac{3g}{4l}\sin\theta-\frac{9C_\varphi^2\cos\theta}{8m^2l^4\sin^2\theta}=0$

$$\frac{4}{3}ml^2\dot{\varphi}\sin^2\theta=C_\varphi$$

6－21 $\ddot{\theta}+\frac{4gl}{4l^2+r^2}\sin\theta=0$

6－22 $mx-m(l_0+x)\theta^2+kx=0$

$$\theta=\int\frac{C_\theta}{J_0+m(l_0+x)^2}\mathrm{d}t+C'_\theta$$

6－23 $D=\frac{1}{2}c(\dot{x}_1-\dot{x}_2)^2$

$$mx_1+c(\dot{x}_1-\dot{x}_2)+k(2x_1-x_2)=0$$

$$mx_2+c(\dot{x}_2-\dot{x}_1)+k(2x_2-x_1)=0$$

第 7 章　哈密顿正则方程

7－1 $H=\frac{p_1^2+5p_2^2-2p_1p_2\cos(q_1-q_2)}{2[5-\cos^2(q_1-q_2)]}-3\cos q_1-\cos q_2$

7－2　$H=\frac{1}{2at^2}(p_1+p_2)^2+\frac{1}{2}p_2^2+a\cos q_2$

7－3　$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-\frac{a}{4}(q_1-q_2)^2-\frac{b}{4}(q_1+q_2)^2$

7－4　$$\begin{cases} r=\frac{p_r}{m},\ p_r=\frac{1}{mr^3}\left\{p_\theta^2+\frac{[p_\varphi+aF(\theta)]^2}{\sin^2\theta}\right\} \\ \theta=\frac{p_\theta}{mr^2},\ p_\theta=\frac{[p_\varphi+aF(\theta)]}{mr^2\sin^3\theta}\left\{[p_\varphi+aF(\theta)]\cos\theta-a\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta\right\} \\ \dot{\varphi}=\frac{p_\varphi+aF(\theta)}{mr^2\sin^2\theta},\ \dot{p}_\varphi=0 \end{cases}$$

7－5　$x=\frac{p_x}{M+m}+\frac{mR}{M+m}\omega_0\cos\theta+\frac{m^2R^2\sin\theta\cos\theta}{MmR^2+m^2R^2\sin^2\theta+(M+m)J}\cdot gt$

$\dot{\varphi}=\frac{(M+m)mR\sin\theta}{MmR^2+m^2R^2\sin^2\theta+(M+m)J}\cdot gt+\omega_0$

7－6　$m\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-m\omega^2r\sin^2\alpha+k(r-l_0)-mg\cos\alpha=0$

$\frac{1}{2}mr^2-\frac{1}{2}m(\omega r\sin\alpha)^2+\frac{1}{2}k(r-l_0)^2-mgr\cos\alpha=h$

7－7　$H=\frac{1}{2at^2}(p_1+p_2)^2+\frac{1}{2}p_2^2+a\cos q_2$

7－8　$$\begin{cases} (L_x,p_y)=p_z,(L_y,p_z)=p_x,(L_z,p_x)=p_y \\ (L_x,p_z)=-p_y,(L_y,p_x)=-p_z,(L_z,p_y)=-p_x \\ (L_x,p_x)=(L_y,p_y)=(L_z,p_z)=0 \end{cases}$$

7－9　略

7－10　略

7－11　$f=f_1(q_j,p_j,t)-f_2(q_j,p_j,t)$

7－12　略

7－13　$F=te^p$

7－14　略

7－15　$F_1=\sum_{s=1}^{n}(q_s+Q_s)^{\alpha+1}$

7－16　$F_1=mv_0q,F_2=(mv_0-p)\arcsin Q$

$F_3=mv_0q+P\sin q$

$F_4=(mv_0-p)\arccos(\frac{p-mv_0}{P})+\sqrt{P^2-(p-mv_0)^2}$

7－17　$Q_1=\frac{1}{2p_1p_2^2-q_1}-p_1$，$Q_2=\frac{1}{2p_1^2p_2-q_2}-p_2$

$P_1 = q_1 - 2p_1p_2^2, \qquad P_2 = q_2 - 2p_1^2p_2$

7－18　$Q = \frac{1}{2}(p^2 + q^2), P = -\arctan\frac{q}{p}, Q = 0, P = -1$

7－19　$H^* = Q, q = \sqrt{2C_1}\sin(t - C_2), p = \sqrt{2C_1}\cos(t - C_2)$

7－20　略

7－21　$x = \sqrt{\frac{2C_1}{m\omega_1}}\sin(\omega_1 t + \alpha_1), \quad y = \sqrt{\frac{2C_2}{m\omega_2}}\sin(\omega_2 t + \alpha_2)$

（式中 C_1、C_2、α_1、α_2 为积分常数）

7－22　$\frac{\partial S}{\partial t} + q + \frac{\partial S}{\partial q} = 0$

7－23　$\theta = \theta_0 t + \frac{g\sin\alpha}{3r}t^2$

7－24　$\frac{\partial S}{\partial t} + (\frac{\partial S}{\partial q_1})^2 q_2^2 + (\frac{\partial S}{\partial q_2})^2\tan q_2 + q_2^2\cos q_1 = 0$

$$S = -ht + \int\sqrt{\beta_1 - \cos q_1}\mathrm{d}q_1 + \int\sqrt{\frac{h - \beta_1 q_2^2}{\tan q_2}}\mathrm{d}q_2$$

$$\alpha = \frac{\partial S}{\partial h} = -t + \int\frac{\mathrm{d}q_2}{2\sqrt{(h - \beta_1 q_2^2)\tan q_2}}$$

$$\alpha_1 = \frac{\partial S}{\partial \beta_1} = \int\frac{\mathrm{d}q_1}{2\sqrt{\beta_1 - \cos q_1}} - \int\frac{q_2^2\mathrm{d}q_2}{2\sqrt{(h - \alpha_1 q_2^2)\tan q_2}}$$

7－25　$S = -ht + \frac{1}{\beta_2}(2\beta_1 q_1 - \frac{q_1^3}{3}) + \frac{1}{2}(\beta_2 q_2 - \frac{1}{2}q_2^2)$

第8章　拉格朗日乘子法

8－1　绕定滑轮的张力为$\frac{8m_1m_2m_3g}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3}$，$m_1$ 的加速度为

$\frac{m_1(m_2 + m_3) - 4m_2m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3}$

8－2　$x = x_0\cos\omega t$，$y = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$，式中 $\omega^2 = \frac{v_0^2 + gl}{l^2}$

8－3　$x_C = \frac{1}{4}gt^2\sin\alpha + c_1 t + c_2$

$y_C = r$

$\theta = \frac{1}{4r}gt^2\sin\alpha + c_3 t + c_4$

$\lambda_1 = mg\cos\alpha$　（法向约束反力）

$\lambda_2 = -\frac{1}{2}mg\sin\alpha$（摩擦力）

8－4 $mx = 2\lambda x$，$my = 2\lambda \dot{y}$

$$mz = -mg - 2\frac{a^2}{b^2}\lambda z$$

$$\lambda = -mg\frac{a^2}{b^2}\dot{z}/2(\dot{x}^2 + y^2 + \frac{a^4}{b^4}\dot{z}^2)$$

8－5 $m(x+c)^2\varphi + 2m(x+c)\dot{x}\dot{\varphi} + J_A\varphi = -mg(x+c)\sin\varphi + 2\lambda ax\sin\varphi$

$$mx - m(x+c)\dot{\varphi}^2 = mg\cos\varphi + 2\lambda(x - a\cos\varphi)$$

8－6 $r\sin\varphi - l\sin\theta = 0$

$$(\frac{1}{3}m_1 - m_2)r^2\varphi - \frac{1}{2}m_2 rl\ddot{\theta}\cos(\varphi+\theta) + \frac{1}{2}m_2 rl\theta^2\sin(\theta+\varphi)$$

$$= M - \frac{1}{2}mgr\cos\theta + \lambda r\cos\varphi$$

$$\frac{1}{3}m_2 l^2\ddot{\theta} - \frac{1}{2}m_2 rl\varphi\cos(\theta+\varphi) + \frac{1}{2}m_2 rl\varphi^2\sin(\theta+\varphi)$$

$$= -\frac{1}{2}m_2 gl\cos\theta - \lambda l\cos\theta$$

8－7 $\rho^2 + 4l^2\cos\varphi - 5l^2 = 0$

$$mL^2\varphi + mgL\sin\varphi = -4\lambda l^2\sin\varphi$$

$$k(\rho - l_0) = 2\lambda\rho$$

8－8 (1) $\dot{x}_C + l\varphi\sin\varphi + r\theta_A\sin\varphi = 0$

$$x_C - l\varphi\cos\varphi + r\theta_B\sin\varphi = 0$$

$$y_C + l\dot{\varphi}\cos\varphi - r\theta_B\cos\varphi = 0$$

(2) $x_C = \frac{v}{\omega}(\cos\omega t - 1)$，$y_C = \frac{v}{\omega}\sin\omega t$

(3) $(x_C + \frac{v}{\omega})^2 + y_C^2 = (\frac{v}{\omega})^2$

8－9 略

8－10 $\theta = 41°48'$

第9章　阿沛尔方程

9－1 $T = 2\pi\sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}$

9－2 $a_{Ar} = \frac{(P+Q)\sin\alpha}{Q + P\sin^2\alpha}g$；　$a_B = \frac{P\sin2\alpha}{2(Q + P\sin^2\alpha)}g$

9－3　$z_A + \dfrac{z_A \dot{z}_A^2}{3l^2 - z_A^2} = -\dfrac{3}{2} g \left(1 - \dfrac{z_A^2}{3l^2}\right)$

9－4　略

9－5　$m\pi_1 - ma\pi_2 = R$，　$(J + ma^2)\pi_2 + ma(\pi_1\pi_2) = L$

第 10 章　凯恩方程

10－1　$(M + m)u_1 - m\dfrac{u_2^2}{l}\sin\theta + mu_2\cos\theta = 0$

$\dot{u}_1\cos\theta + \dot{u}_2 = -g\sin\theta$（$u_1$，$u_2$ 是伪速度）

10－2　(1) $\dfrac{P}{g}(\dot{u}_1 - u_2) + J_C\dfrac{\dot{u}_1}{r^2} = P\sin\alpha$

$\dfrac{P}{g}(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) - \dfrac{Q}{g}\dot{u}_2 = P\sin\alpha - Q$

(2) 略

10－3　$\ddot{\theta} - \omega^2\sin\theta\cos\theta - \dfrac{g}{a}\sin\theta = 0$

$(P + Q)x - Qs\cos\alpha = 0$

$2x\cos\alpha - 3s + 2g\sin\alpha = 0$

10－4　$14r\ddot{\theta} - \dfrac{3}{2}r\varphi + 3r\dot{\varphi}\cos(\theta - \varphi) + 3r\dot{\varphi}^2\sin(\theta - \varphi) + 2g\sin\theta = 0$

$2r\ddot{\theta} - \dfrac{9}{2}r\varphi - 4r\ddot{\theta}\cos(\theta - \varphi) + 4r\theta\sin(\theta - \varphi) - g\sin\varphi = 0$

10－5　$(I + Ma^2)\pi_1 - Ma^2\omega\pi_2 + Ma\omega^2 y_C = 0$

$(Ma^2 + I)\pi_2 + Ma^2\omega\dot{\pi}_1 - ma\omega^2 x_C = 0$

$I\pi_3 = 0$

参考文献

1 汪家訸．分析力学．北京:高等教育出版社,1982

2 黄昭度等．分析力学．北京:清华大学出版社,1986

3 邱秉权．分析力学．北京:中国铁道出版社,1998

4 许庆余等．分析力学．北京:高等教育出版社,1992

5 毕学涛．高等动力学．天津:天津大学出版社,1994

6 [美]戈德斯坦 H. 经典力学．北京:科学出版社,1981

7 [美]罗森伯 R. 离散系统分析动力学．北京:人民教育出版社,1981

8 [美]格林伍德 D T. 经典动力学．北京:科学出版社,1982

9 陈强顺．分析力学导论．上海:同济大学出版社,1997

10 孙国锟．分析力学．西安:西北工业大学出版社,1989

11 刘延柱等．理论力学．北京:高等教育出版社,1991

12 陈滨．分析动力学．北京:北京大学出版社,1987

13 谈开孚等．分析力学．哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1985

14 梅凤翔．非完整动力学研究．北京:北京工业学院出版社,1987

15 刘正福等．分析力学解题指导及习题集．北京:高等教育出版社,1992

16 刘桂林．分析力学范例与习题．北京:北京理工大学出版社,1988